

Calculating the Electrons Distribution Function for Gallium Arsenide at Low Fields by Solving the Boltzmann Transport Equation

Noora Anwar Mohammed Jamil^{1*}, Ali Abbas Mohammed Salih²

^{1,2}Department of Physics, Education Collage for Pure Science, University of Mosul, Mosul, IRAQ

E-mail: ^{1*}oophnn@gmail.com, ²dr.ali1969@uomosul.edu.iq

(Received January 04, 2023; Accepted January 24, 2023; Available online March 01, 2023)

DOI: [10.33899/edusj.2023.137643.1313](https://doi.org/10.33899/edusj.2023.137643.1313), © 2023, College of Education for Pure Science, University of Mosul.

This is an open access article under the CC BY 4.0 license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Abstract

The electron distribution function for gallium arsenide GaAs was calculated by using the Boltzmann transition equation in the central valley $\Gamma <000>$, for a range of low fields relative to the threshold field ($E_0 = 5.95 \text{Kv/cm}$) $(0.3-1)E_0$. To obtain the distribution function, the Boltzmann transport equation was solved using a mechanism that combines the analytical and numerical methods. Analytical method involving extension of the Legendre polynomial was used and the effect of polar optical scattering was introduced as the dominant scattering mechanism in this research, as well as the effect of an asymmetric energy band structure with spherical energy surfaces in the central valley. After obtaining a partial differential equation of the second order, it is solved numerically after separation process for the variables using the direct matrix method in energy space by building a mathematical program using MATLAB. In this study, a system with dimensions of 360×360 was built, and the rate of change in energy was taken as $\Delta\varepsilon = 0.001$. The computational system was tested by applying low electric fields, and the distribution function that was obtained had a Maxwellian distribution at very low fields, and it shifted from the Maxwellian distribution at higher fields close to the threshold field, and the results obtained were agree with previous results. While this system did not give accurate results at the high-electric fields.

keywords: Boltzmann distribution function, Polar Optical Scattering, Legendre polynomial and gallium arsenide.

حساب دالة توزيع الإلكترونات لارسنايد الكاليوم عند المجالات الواطنة بحل معادلة بولتزمان للانتقال

نورة أنور محمد جميل، علي عباس محمد صالح

قسم الفيزياء، كلية التربية للعلوم الصرفة، جامعة العراق، موصل، العراق

الخلاصة

تم حساب دالة التوزيع الإلكتروني لارسنايد الكاليوم GaAs باستخدام معادلة الانتقال لبولتزمان في منخفض الطاقة المركزي $\Gamma <000>$. ولمدى من المجالات الواطنة نسبة إلى مجال العتبة ($E_0 = 5.95 \text{Kv/cm}$) $(0.3-1)E_0$. للحصول على دالة التوزيع تم حل معادلة الانتقال لبولتزمان باستخدام آلية تجمع بين الطريقة التحليلية والطريقة العددية. إذ استخدمت الطريقة التحليلية المتضمنة اتساع

متعددة حدود لاجندر وإدخال تأثير الاستطارة البصرية القطبية كألية استطارة المهيمنة في هذا البحث فضلا عن تأثير تركيب حزمة الطاقة غير المتكافئة ذات السطوح الطاقة الكروية في منخفض الطاقة المركزي. بعد الحصول على معادلة تفاضلية جزئية من الدرجة الثانية يتم حلها عدديا بعد إجراء عملية فصل للمتغيرات باستخدام طريقة المصفوفة المباشرة في فضاء الطاقة بإنشاء برنامج حسابي باستخدام MATLAB. تم في هذه الدراسة بناء منظومة ذات أبعاد 360×360 وأخذ معدل التغير في الطاقة $\Delta \varepsilon = 0.001$. ثم اختبار المنظومة الحسابية وذلك بتسليط مجالات كهربائية منخفضة وكانت دالة التوزيع التي تم الحصول عليها ذات توزيع ماكسويلي عند المجالات الواطئة جدا ويزاح عن توزيع ماكسويل عند المجالات الأعلى والقريبة من مجال العتبة وكانت النتائج التي تم الحصول عليها متفقة مع نتائج سابقة. في حين لم تعط هذه المنظومة نتائج دقيقة عند المجالات المسطحة العالية.

الكلمات المفتاحية: دالة توزيع بولتزمان، الاستطارة البصرية القطبية، متعدد حدود لاجندر و ارسنايد الكاليوم.

1. المقدمة: Introduction

يتم بناء معظم الدراسات تحليل نباتات أشباه الموصلات على مبدأ الحل التقريبي والذي يعرف بالمعالجة شبه الكلاسيكية إذ يمكن وصف القوى الحركية لحاملات الشحنة باستخدام قوانين نيوتن من دون معالجة للجهد البلوري، ويستخدم تأثير الكتلة الفعالة أو تركيب حزمة الطاقة لمعالجة تأثير الجهد البلوري، ويمكن بواسطة الميكانيك الكمي التعامل مع استطارة حاملات الشحنة [1],[2]. تتحكم دالة توزيع حاملات الشحنة بخصائص الانتقال للإلكترونات، إذ تلعب الإلكترونات دوراً مهماً في النباتات ذات السرعة العالية التي تحتاج إلى معرفة خواص الانتقال مثل التحركية Mobility وسرعة الانجراف Drift Velocity كدوال لمتغيرات عديدة مثل المجالات الكهربائية والمغناطيسية ودرجات الحرارة والاتجاهات البلورية. تستطار الكترونات نتيجة لاهتزازات الشبكة البلورية أو بسبب وجود الشوائب داخل البلورة وبدورها تؤثر على دالة التوزيع وتجعلها في حالة غير مستقرة (مضطربة)، لذلك يجب إجراء نمذجة Modeling لمعادلة بولتزمان شبه الكلاسيكية للحصول على دالة التوزيع في حالة وجود قوى خارجية مؤثرة على شبه الموصل وتكون هذه القوى إما كهربائية، حرارية، أو مغناطيسية [3]. وتخضع دالة توزيع الإلكترونات لأشباه الموصلات المنحلة Degenerate Semiconductors في حالة التوازن (أي في حالة غياب القوى الخارجية) لإحصاء فيرمي-ديراك في حين تخضع لتوزيع ماكسويل في أشباه الموصلات غير المنحلة والذي يعطي احتمالات أكثر لتوزيع الإلكترونات في فضاء الطاقة [1],[4]. هناك العديد من نماذج الحل الرياضية لمعادلة بولتزمان منها تحليلية باستخدام تقريب زمن الاسترخاء والتي تعد طريقة سهلة للحل ولكنها تكون غير دقيقة في بعض الأحيان وخصوصاً عندما لا تمتلك حزمة الطاقة المعنية بالدراسة تماثلاً كروياً وكذلك عندما تكون الية الاستطارة المهيمنة غير مرنة [5],[6]. وتعد طريقة فصل متغيرات من الطرائق الشائعة للحل أيضاً وكذلك يمكن استخدام الطرائق العددية بشكل واسع في الحل ومنها طريقة رود التكرارية Rode Iterative Method [7] وطريقة مونت كارلو التي أعطت نتائج دقيقة إلى حد كبير [8]. وفي هذا البحث تم استخدام الطريقة التحليلية والحصول على معادلة خطية تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية باستخدام طريقة حسابية ذات كفاءة ودقة عالية في حساب داله التوزيع للإلكترونات لشبه الموصل المركب ارسنايد الكاليوم النقي GaAs عن طريق حل معادلة بولتزمان شبه كلاسيكية، إذ تم الأخذ بنظر الاعتبار وجود تأثير مجال كهربائي واطى وعدم وجود تأثير للمجال مغناطيسي وليس هناك تغير في درجة الحرارة أيضاً. وبعد إجراء الاشتقاق المناسبة وفصل المتغيرات يتم حل هذه المعادلة عددياً باستخدام طريقة المصفوفة المباشرة في فضاء الطاقة للحصول على دالة التوزيع المتضمنة تأثير استطارة الفونونات القطبية البصرية فقط Polar Optical Phonons وذلك لانتقال الإلكترونات في نفس منخفض الطاقة المركزي والذي يكون ذا تماثل كروي [5],[9].

2. حل معادلة الانتقال لبولتزمان عند المجال الواطئ:

Solve the Boltzmann Transport Equation (BTE) at Low Field

2-1. الصياغة التحليلية لمعادلة الانتقال لبولتزمان: Analytical Formalism of the BTE

يتم الحصول على دالة التوزيع في فضاء الزخم باستخدام معادلة بولتزمان القياسية لانتقال حاملات الشحنة في حالة الاتزان (الحالة المستقرة) في شبه الموصل المركب ارسنايد الكاليوم GaAs والتي تعطى بالصيغة الآتية [3]:

$$\frac{\partial f(\vec{k})}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r f(\vec{k}) - \frac{e\vec{E}}{\hbar} \cdot \vec{\nabla}_k f(\vec{k}) = \left| \frac{\partial f(\vec{k})}{\partial t} \right|_{coll} \quad (1)$$

إذ يمثل \vec{k} متجه موجة الإلكترون، وتمثل $f(k)$ دالة التوزيع للإلكترون في منخفض الطاقة المركزي في حزمة التوصيل ويرمز للمجال الكهربائي الواطئ \vec{E} و \vec{v} أما $\vec{\nabla}_r$ و $\vec{\nabla}_k$ يمثلان الانحدار بالنسبة لمتجه الموجة والانحدار بالنسبة للموقع على التوالي. يدعى الجزء الأيسر من المعادلة (1) بحدود الانسياق streaming terms أما بالنسبة للحد في الجهة اليمنى فيمثل تأثير الاستطارة والذي يتضمن الاستطارة القطبية البصرية والسمعية [10].

عند تسليط مجال كهربائي منخفض فان الإلكترونات لا تمتلك طاقة عالية للانتقال إلى حزم طاقة أعلى في منخفضات طاقة العالية وإنما تبقى في حزمة طاقة المركزية Central Valley (Γ) وهي حزمة طاقة ذات سطوح طاقة كروية [11],[12] لهذا السبب لا تستخدم تحويلات هيرنك- فوجت. تم في هذه الدراسة إيجاد الصياغة التحليلية لمعادلة بولتزمان في فضاء الزخم عندما تكون الإلكترونات ذات طاقات واطئة جدا لا تستطيع الانتقال إلى منخفضات طاقة أعلى من منخفض الطاقة المركزي. وتعد الية الاستطارة القطبية البصرية Polar Optical Scattering هي المهيمنة في حالة المجالات الواطئة [5],[13].

يمكن التعبير عن دالة التوزيع $f(k)$ بدلالة اتساع سلسلة متعددة حدود لاجندر Legendre Polynomials كخطوة أولى من اجل تمثيل حد المجال الكهربائي [4]:

$$f(\vec{k}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\epsilon) P_n(\cos \theta) \quad (2)$$

إذ تمثل $f_n(\epsilon)$ دالة التوزيع للإلكترونات والتي تحدد بحدل معادلة بولتزمان و $P_n(\cos \theta)$ هو معامل متعددة حدود لاجندر، وتمثل θ الزاوية بين متجه الموجة k والمجال الكهربائي المسلط E . عند تعويض المعادلة (2) في معادلة بولتزمان يتم الحصول على مجموعة لانهاية من المعادلات التفاضلية المقترنة f_n' s [8]. تم في هذه الدراسة إيجاد معاملات الانتقال للإلكترونات في مجال كهربائي واطئ باشتقاق معادلة بولتزمان في الحالة المستقرة steady state. يمكن التعبير عن دالة التوزيع f_k في بعد واحد كمجموع للحد الأول والحد الثاني لمتعددة حدود لاجندر مضروبة بمعاملاتها إذ يمكن كتابتها بالصيغة الآتية [4]:

$$f_n(k) = f_o(\epsilon) + k(\epsilon) g(\epsilon) \cos(\theta) \quad (3)$$

تمثل $f_o(\epsilon)$ معاملات الحد الأول لمتعددة حدود لاجندر وهو الجزء المتماثل من دالة التوزيع Symmetrical Part، في حين يمثل الجزء الثاني الغير متماثل من دالة التوزيع Antisymmetric Part، يمثل $g(\epsilon)$ معامل الحد الثاني لمتعددة حدود لاجندر [9]. يكون اتجاه المجال الكهربائي المسلط في المجالات المنخفضة باتجاه متجه موجة الكترون، أي أن $\cos \theta = 1$ [14],[15]. يمكن كتابة معادلة بولتزمان (1) بدلالة كل من حد المجال وحد الاستطارة بالصيغة الآتية:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{Field} = \left|\frac{\partial f(k)}{\partial t}\right|_{coll} \quad (4)$$

ولجعل معادلة الانتقال لبولتزمان بصيغة قابلة للحل يتم حل المعادلة (4) بصورة منفصلة لكلا من حد المجال وحد الاستطارة على التوالي. إذ يتم البدء بأشتقاق تعبير رياضي يصف تأثير المجال الكهربائي على دالة التوزيع. يمكن إعادة صياغة المعادلة (4) بالصيغة الآتية:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{Field} = -\frac{eE}{\hbar} \nabla_k f(k) \quad (5)$$

يدعى \hbar ثابت ديراك. يتم تعويض المعادلة (3) في حد المجال لمعادلة الانتقال لبولتزمان، المعادلة (5)، نحصل على:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{Field} = -\frac{eE}{\hbar} \frac{\partial}{\partial k} (f_o(\varepsilon) + k_E(\varepsilon) g(\varepsilon)) \quad (6)$$

وبنفس الطريقة يمكن التعبير عن حد الاستطارة من معادلة بولتزمان شبه كلاسيكية بتعويض الحد الأول والثاني من متعددة حدود لاجندر وتكتب بالصيغة الآتية:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = \frac{\partial f_o}{\partial t} + \frac{\partial k g(\varepsilon)}{\partial t} \quad (7)$$

يعبر عن اعتماد الطاقة ε على متجه الموجة k بواسطة علاقة التفريق dispersion relation التي تعطى بالصيغة الآتية [16]:

$$\gamma(\varepsilon) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_F^*} = \varepsilon (1 + \alpha \varepsilon + \beta \varepsilon^2 + \dots) \quad (8)$$

بالنسبة لارسنايد الكاليوم فان $\alpha = 0.576/\text{eV}$ و $\beta = -0.050/(\text{eV})^2$. وتمثل m_F^* كتلة الإلكترون اسفل حزمة الطاقة Γ [17]. بعد إجراء التقريبات المناسبة على كلا من حد المجال وحد الاستطارة وتعويضهم في معادلة بولتزمان شبه كلاسيكية يمكن الحصول على المعادلتين الآتيتين:

$$\left(-\frac{eE}{\hbar} \frac{\partial f_o}{\partial k}\right)_{field} + \left(\frac{\partial k g(\varepsilon)}{\partial t}\right)_{coll} = 0 \quad (9)$$

$$\left(-\frac{eE}{\hbar} \frac{\partial k g}{\partial k}\right)_{field} + \left(\frac{\partial f_o}{\partial t}\right)_{coll} = 0 \quad (10)$$

بحل أي من المعادلتين أعلاه يمكن الحصول على دالة التوزيع المضطربة للإلكترون f . واعتمد على المعادلة (10) لإيجاد دالة التوزيع المضطربة والتي تمثل الجزء المتمائل من حد الاستطارة مع حد المجال بجزئها غير المتمائل. يعطى التشويه في دالة التوزيع الكترون بدلالة زمن الاسترخاء من المعادلة (10) بالصيغة الآتية:

$$-\frac{eE}{\hbar} \frac{\partial f_o}{\partial k} - \frac{k g(\varepsilon)}{\tau} = 0 \quad (11)$$

باستخدام قانون المتسلسلة chin rule يتم الحصول على دالة الاضطراب $g(\varepsilon)$ وتكون بالصيغة الآتية [7]:

$$g(\varepsilon) = -\frac{e\hbar E \tau_{po}}{m_F^* \gamma'} \frac{\partial f_o}{\partial \varepsilon} \quad (12)$$

تمثل τ_{po} زمن الاسترخاء للإلكترونات Relaxation Time.

يتم التحليل الرياضي للحد الأول من المعادلة (10) للحصول على الجزء غير المتمائل من المجال والذي يعطى بالصيغة الآتية:

$$\left(\frac{\partial k g}{\partial t}\right)_{field} = \left(-\frac{eE}{\hbar} \frac{\partial k g}{\partial k}\right)_{field} \quad (13)$$

وبإجراء عمليات رياضية باستخدام قانون المتسلسلة وتقريب طاقة الإلكترون $\gamma(\varepsilon) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_F^*}$ إلى متوسط طاقة للإلكترونات الذي يساوي $\frac{2\gamma}{3}$ يمكن الحصول على الصيغة الآتية [18],[19]:

$$\left(\frac{\partial kg}{\partial t}\right)_{field} = -\frac{2eE}{3\hbar\gamma^{\frac{1}{2}}}\frac{d}{d\varepsilon}(\gamma^{3/2}g(\varepsilon)) \quad (14)$$

ويمكن الحصول على حد الاستطارة من المعادلة (10) بدلالة معدلات الاستطارة إلى الداخل وإلى الخارج في فضاء. يعبر عن معدل استطارة الكترون-فونون القطبي البصري بدلالة المعادلة الأتية [8],[20]:

$$S(k, k') = \frac{e^2 \omega_{op}}{8 \pi^2 \varepsilon_0} \left(\frac{1}{k_{\infty}} - \frac{1}{k_0}\right) \left(\frac{1}{|k-k'|^2}\right) (N \pm 1) \delta(\varepsilon_{(k')} - \varepsilon_{(k)} \pm \hbar\omega_{op}) \quad (15)$$

إذ يمثل كل من k_{∞} , k_0 ثوابت العزل عند الترددات صفر و ما لانهاية على التوالي و $\varepsilon_{(k)}$, $\varepsilon_{(k')}$ تمثل الطاقات عند مستويات متجه الموجة k' و k على التوالي في حين يمثل $\hbar\omega_{op}$ طاقة الفونونات القطبية البصرية و N تركيز الفونونات البصرية والتي يتم إيجادها من إحصاء بوز- انشتاين وتعطى بالصيغة الأتية [7],[21]:

$$N = \frac{1}{x-1} \quad (16)$$

يمكن التعبير عن المعامل x بالمعادلة الأتية:

$$x = e^{\frac{\hbar\omega_{op}}{K_B T}} \quad (17)$$

يمكن الحصول على حد الاستطارة من المعادلة العامة لنظرية الاضطراب المعتمدة على الزمن - Ordinary Time Dependent Perturbation theory [22] وبعد تعويض معدلات الاستطارة وأجراء عمليات رياضية واستبدال متغيرات التكامل من فضاء الزخم إلى فضاء الطاقة وتنفيذ التكامل على كل فضاء الطاقة وبعد فصل المتغيرات يتم الحصول على الصيغة النهائية لحد الاستطارة والذي يعطى بالصيغة الأتية:

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial t}\right)_{coll} = \frac{eE_0}{(2m_F^* \gamma(\varepsilon))^{1/2}} \left(\frac{1}{x-1}\right) \left\{ \left[x f_{0(\varepsilon+\hbar\omega_{op})} - f_{0(\varepsilon)} \right] \Omega_{(\varepsilon+\hbar\omega_{op})} \frac{d\gamma(\varepsilon+\hbar\omega_{op})}{d\varepsilon} + \left[f_{0(\varepsilon-\hbar\omega_{op})} - x f_{0(\varepsilon)} \right] \Omega_{(\varepsilon)} \frac{d\gamma(\varepsilon-\hbar\omega_{op})}{d\varepsilon} \right\} \quad (18)$$

إذ يمثل E_0 المجال الكهربائي المؤثر والذي يعبر عن قوة اقتران الكترون في النمط القطبي وتمثل بالمعادلة الأتية [23],[24]:

$$E_0 = \frac{me\omega_{op}}{\hbar\varepsilon_0} \left(\frac{1}{K_{\infty}} - \frac{1}{K_0}\right) \quad (19)$$

ويعبر عن كل من $\Omega_{(\varepsilon+\hbar\omega_{op})}$ و $\Omega_{(\varepsilon)}$ بالصيغة الأتية [19]:

$$\Omega_{(\varepsilon)} = \text{Ln} \left[\frac{\gamma_{(\varepsilon-\hbar\omega_{op})}^{1/2} + \gamma_{(\varepsilon)}^{1/2}}{|\gamma_{(\varepsilon-\hbar\omega_{op})}^{1/2} - \gamma_{(\varepsilon)}^{1/2}|} \right] \quad (20)$$

$$\Omega_{(\varepsilon+\hbar\omega_{op})} = \text{Ln} \left[\frac{\gamma_{(\varepsilon+\hbar\omega_{op})}^{1/2} + \gamma_{(\varepsilon)}^{1/2}}{|\gamma_{(\varepsilon+\hbar\omega_{op})}^{1/2} - \gamma_{(\varepsilon)}^{1/2}|} \right] \quad (21)$$

عند التعويض عن دالة الاضطراب $g(\varepsilon)$ بدلالة زمن الاسترخاء، المعادلة (12)، لمنخفض الطاقة المركزي للفونون القطبي البصري بدلالة طاقة الكترون (ε) والذي يمثل بالصيغة الأتية [13],[17]:

$$\tau_{op} = \frac{(2m_F^*)^{\frac{1}{2}}}{eE_0} \left(\frac{x-1}{x+1}\right) \gamma^{1/2} \quad (22)$$

وبالتعويض عن المعدل الزمني لتغير في دالة التوزيع بسبب عمليات الاستطارة في المعادلة (10) وبعد إجراء مجموعة من عمليات الرياضية واستخدام تقريبات مناسبة للحل وفصل المتغيرات وإعادة ترتيب المعادلة وإخراج الحدود المتشابهة نحصل على معادلة الانتقال النهائية لبولتزمان والتي يعبر عنها بالصيغة الآتية:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{8}eE^2(x-1)}{3m_1^{\frac{1}{2}}E_0(x+1)} \frac{\gamma_{(\varepsilon)}^2}{\gamma'_{(\varepsilon)}^3} f''_{(\varepsilon)} + \frac{\sqrt{8}eE^2(x-1)}{3m_1^{\frac{1}{2}}E_0(x+1)} \left(\frac{2\gamma_{(\varepsilon)}}{\gamma'_{(\varepsilon)}^2} - \frac{2\gamma_{(\varepsilon)}^2\gamma''}{\gamma'_{(\varepsilon)}^4} \right) f'_{(\varepsilon)} \\ & - \left(\left\{ \frac{eE_0}{(2m_1)^{\frac{1}{2}}(x-1)} \Omega_{(\varepsilon+\hbar\omega_0)} \right\} \gamma'_{(\varepsilon+\hbar\omega_0)} + \left\{ \frac{eE_0x}{(2m_1)^{\frac{1}{2}}(x-1)} \Omega_{(\varepsilon)} \right\} \gamma'_{(\varepsilon-\hbar\omega_0)} \right) f_{(\varepsilon)} \\ & + \frac{eE_0x}{(2m_1)^{\frac{1}{2}}(x-1)} \Omega_{(\varepsilon+\hbar\omega_0)} \gamma'_{(\varepsilon+\hbar\omega_0)} f_{(\varepsilon+\hbar\omega_0)} + \frac{eE_0}{(2m_1)^{\frac{1}{2}}(x-1)} \Omega_{(\varepsilon)} \gamma'_{(\varepsilon-\hbar\omega_0)} f_{(\varepsilon-\hbar\omega_0)} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

إذ يمثل كل من $f'_{(\varepsilon)}, f''_{(\varepsilon)}$ المشتقة الأولى والثانية لدالة التوزيع بالنسبة للطاقة. و يعبر عن كل من $\gamma'_{(\varepsilon+\hbar\omega_0)}$ و $\gamma'_{(\varepsilon-\hbar\omega_0)}$ بدلالة المعادلات الآتية:

$$\gamma'_{(\varepsilon+\hbar\omega_0)} = 1 + 2\alpha(\varepsilon + \hbar\omega_0) + 3\beta(\varepsilon + \hbar\omega_0)^2 \quad (24)$$

$$\gamma'_{(\varepsilon-\hbar\omega_0)} = 1 + 2\alpha(\varepsilon - \hbar\omega_0) + 3\beta(\varepsilon - \hbar\omega_0)^2 \quad (25)$$

تمثل المعادلة (23) هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية Second Order Differential Equation في فضاء الطاقة.

2-2. الصياغة العددية لمعادلة الانتقال لبولتزمان: Numerical Formalism of The BTE

لا يمكن حل المعادلة (23) باستخدام الطرائق التحليلية لذلك يتم استخدام الحل العددي في إيجاد دالة التوزيع. إذ استخدمت طريقة الفروق المحددة (FDM) Finite Difference Method. إن طريقة فروق المحددة العددية من أكثر الطرائق استخداماً لتقريب حل المعادلات التفاضلية وتتمثل الفكرة من هذه الطريقة هو استبدال المشتقة الجزئية لدالة غير معروفة بتقريبات الفروق المحددة إذ تعتمد صيغ التقريب هذه على متسلسلة تايلر [25],[26]. إن الهدف من تطبيق طريقة معادلات الفروق هي لتقريب المعادلة (23) كنظام من معادلات الفروق ومن ثم حلها بمجهول واحد باستخدام طريقة المصفوفة Matrix Method. يمكن التعبير عن المشتقة الأولى والثانية لدالة توزيع الطاقة باستخدام معادلات الفروق بالصيغة الآتية [10]:

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = \frac{f_{(i+1)} - f_{(i-1)}}{2\Delta\varepsilon} \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2} = \frac{f_{(i+1)} - f_{(i)} + f_{(i-1)}}{(\Delta\varepsilon)^2} \quad (27)$$

تمثل $\Delta\varepsilon$ مقدار التغير بالطاقة. إذ يتم تقسيم مجال الطاقة إلى N من النقاط متساوية البعد والتي تسمى بالعقدة، لتطبيق الحل العددي على معادلة بولتزمان التفاضلية الخطية، أي $N-1$ من فواصل الطاقة المتساوية وبمقدار فاصلة طاقة $\Delta\varepsilon$. يتم كتابة معادلات الفروق لكل عقدة ومن ثم حل المنظومة عددياً بأعداد برنامج حسابي تم إعداده لهذه الدراسة باستخدام الماتلاب *Matlab* وبالاعتماد على تحويل المعادلة التفاضلية بكل عقدة بمعادلات فروق المحددة، (26) و (27)، والاعتماد على الثوابت الموضحة في الجدول (1) لإيجاد دالة التوزيع الطاقة للإلكترونات. تم التعبير عن دالة التوزيع للكثرون عند كل عقدة بـ f_i والنقطة التي قبلها والنقطة التي بعدها بـ f_{i-1} و f_{i+1} على التوالي.

$$\frac{\sqrt{8}eE^2(x-1)}{3m_1^{\frac{1}{2}}E_0(x+1)} \frac{\gamma_{(\varepsilon)}^2}{\gamma'_{(\varepsilon)}^3} \left(\frac{f_{(i+1)}-f_{(i)}+f_{(i-1)}}{(\Delta\varepsilon)^2} \right) + \frac{\sqrt{8}eE^2(x-1)}{3m_1^{\frac{1}{2}}E_0(x+1)} \left(\frac{2\gamma_{(\varepsilon)}}{\gamma'^2_{(\varepsilon)}} - \frac{2\gamma_{(\varepsilon)}^2\gamma''}{\gamma'^4_{(\varepsilon)}} \right) \left(\frac{f_{(i+1)}-f_{(i-1)}}{2\Delta\varepsilon} \right) -$$

$$\left(\left\{ \frac{eE_0}{(2m_1)^{\frac{1}{2}}(x-1)} \Omega_{(\varepsilon+\hbar\omega_0)} \right\} \gamma'_{(\varepsilon+\hbar\omega_0)} + \left\{ \frac{eE_0x}{(2m_1)^{\frac{1}{2}}(x-1)} \Omega_{(\varepsilon)} \right\} \gamma'_{(\varepsilon-\hbar\omega_0)} \right) f_{(\varepsilon)} +$$

$$\frac{eE_0x}{(2m_1)^{\frac{1}{2}}(x-1)} \Omega_{(\varepsilon+\hbar\omega_0)} \gamma'_{(\varepsilon+\hbar\omega_0)} f_{(\varepsilon+\hbar\omega_0)} + \frac{eE_0}{(2m_1)^{\frac{1}{2}}(x-1)} \Omega_{(\varepsilon)} \gamma'_{(\varepsilon-\hbar\omega_0)} f_{(\varepsilon-\hbar\omega_0)} = 0$$

(28)

يتم حل معادلات الفروق عند جميع النقاط (العقد) سوية فنحصل على معادلة بمجهول واحد تعطى بالصيغة الآتية:

$$a_i f_i + a_{i+1} f_{i+1} + a_{i-1} f_{i-1} + a_{i+n} f_{i+n} + a_{i-n} f_{i-n} = 0 \quad (29)$$

حيث $i = 1, 2, 3, \dots$. يمكن حل المعادلة (29) باستخدام طريقة المصفوفة التي تمثل بالصيغة الآتية:

$$\hat{A} f = \hat{b} \quad (30)$$

تمثل A هي مصفوفة ذات حجم $N \times N$ من العناصر والتي تكون ذات كثافة واطئة وذلك لأن عدد العناصر الصفيرية يكون أكبر بكثير من عدد العناصر التي لا تساوي صفرا وتتضمن كلا من المعاملات $a_i, a_{i+1}, a_{i-1}, a_{i+n}, a_{i-n}$ لكل من مصفوفة متجه لدالة التوزيع الكترون $f_i, f_{i+1}, f_{i-1}, f_{i+n}, f_{i-n}$ على التوالي. تمثل a_i, a_{i+1}, a_{i-1} معاملات عناصر المصفوفة القطرية، فوق القطر الرئيسي وتحت القطر الرئيس على التوالي ويعطى كل منها بالصيغة الآتية:

$$a_i = -\frac{\sqrt{8}eE^2(x-1)}{3m_1^{\frac{1}{2}}E_0(x+1)} \frac{\gamma_{(\varepsilon)}^2}{\gamma'^3_{(\varepsilon)}} - \left(\left\{ \frac{eE_0}{(2m_1)^{\frac{1}{2}}(x-1)} \Omega_{(\varepsilon+\hbar\omega_{op})} \right\} \gamma'_{(\varepsilon+\hbar\omega_{op})} - \left\{ \frac{eE_0x}{(2m_1)^{\frac{1}{2}}(x-1)} \Omega_{(\varepsilon)} \right\} \gamma'_{(\varepsilon-\hbar\omega_{op})} \right)$$

(31)

$$a_{i+1} = \frac{\sqrt{8}eE^2(x-1)}{3m_1^{\frac{1}{2}}E_0(x+1)} \frac{\gamma_{(\varepsilon)}^2}{\gamma'^3_{(\varepsilon)}} + \frac{\sqrt{8}eE^2(x-1)}{3m_1^{\frac{1}{2}}E_0(x+1)} \left(\frac{2\gamma_{(\varepsilon)}}{\gamma'^2_{(\varepsilon)}} - \frac{2\gamma_{(\varepsilon)}^2\gamma''}{\gamma'^4_{(\varepsilon)}} \right)$$

(32)

$$a_{i-1} = -\frac{\sqrt{8}eE^2(x-1)}{3m_1^{\frac{1}{2}}E_0(x+1)} \frac{\gamma_{(\varepsilon)}^2}{\gamma'^3_{(\varepsilon)}} - \frac{\sqrt{8}eE^2(x-1)}{3m_1^{\frac{1}{2}}E_0(x+1)} \left(\frac{2\gamma_{(\varepsilon)}}{\gamma'^2_{(\varepsilon)}} - \frac{2\gamma_{(\varepsilon)}^2\gamma''}{\gamma'^4_{(\varepsilon)}} \right)$$

(33)

في حين أن a_{i-n}, a_{i+n} يمثل متجهات حدود الاستطارة العليا والسفلى والتي يعتمد موقعها في المصفوفة المعاملات A على طاقة الفونونات $\hbar\omega_{op}$ وتعطى بالصيغة الآتية:

$$a_{i+\hbar\omega} = \frac{eE_0x}{(2m_1)^{\frac{1}{2}}(x-1)} \Omega_{(\varepsilon+\hbar\omega_{op})} \gamma'_{(\varepsilon+\hbar\omega_0)} \quad (34)$$

$$a_{i-\hbar\omega} = \frac{eE_0}{(2m_1)^{\frac{1}{2}}(x-1)} \Omega_{(\varepsilon)} \gamma'_{(\varepsilon-\hbar\omega_{op})} \quad (35)$$

تعطي طاقة الفونون استطارة الفونونات القطبية البصرية 0.036 eV وعندما يكون مقدار التغير في الطاقة $\Delta\varepsilon$ يساوي 0.001

فان مواقع هذه الحدود، المعادلات (34) و (35)، تكون عند الموقع :

$$n = \frac{\hbar\omega_{op}}{\Delta\varepsilon} = \frac{0.036}{0.001} = 36 \quad (36)$$

إذ يقع حد الاستطارة العليا في المصفوفة اعلى من القطر الرئيسي بمقدار 36 مرتبة وكذلك يقع حد الاستطارة السفلى تحت القطر الرئيسي بمقدار 36 مرتبة. ويمكن توضيح حساب دالة التوزيع بالمخطط الانسيابي المبين في الشكل (6).

جدول (1) قيم الثوابت التي تم استخدامها في الدراسة [21].

Parameter		Value	Unit
Effective mass of Γ valley	(m_{Γ}^*)	65592×10^{-31}	0. kg
Free electron mass	(m_0)	9.1×10^{-31}	kg
Electron charge	(e)	1.6×10^{-19}	C
Planck constant	(h)	6.626×10^{-34}	$m^2 \cdot kg/sec$
Boltzmann constant	(K_B)	8.617×10^{-5}	eV /K
Non-parabolicity parameter	(α)	0.576	/ eV
Non-parabolicity parameter	(β)	- 0.050	/ eV^2
Low-frequency dielectric constant	(k_0)	12.9	—
High-frequency dielectric constant	(k_{∞})	10.92	—
Room temperature	(T)	300	K
Polar optical phonon energy	$(\hbar\omega)$	0.036	eV
Intrinsic carrier concentration	(n)	8×10^{-6}	cm^{-3}
Effective electron field	(E_0)	5.95×10^3	Volt/cm

3. المناقشة والنتائج:

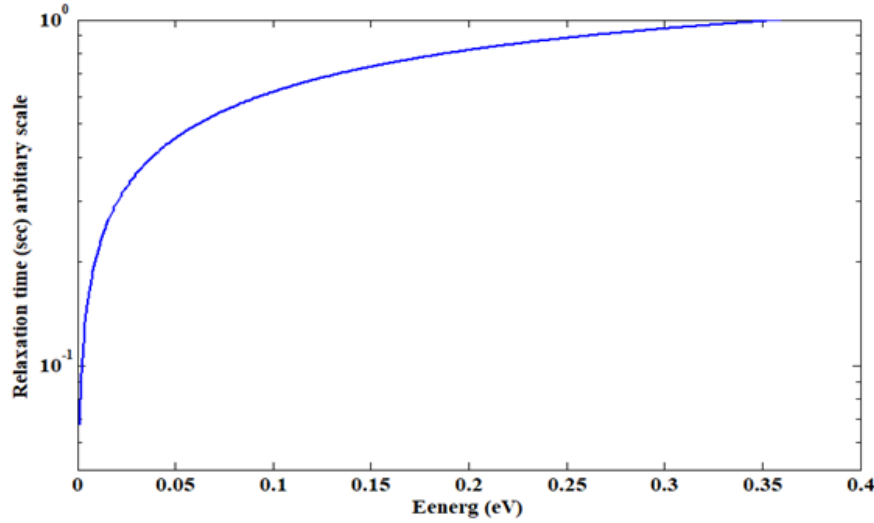
تم حل معادلة الانتقال لبولتزمان كدالة للطاقة عند المجالات المنخفضة وذلك باستخدام دالة توزيع ماكسويل كنقريب أولي لحساب دالة توزيع للإلكترونات في شبه الموصل المركب GaAs. إذ حلت معادلة الانتقال لبولتزمان بصيغتها الرياضية التحليلية بالاعتماد على اتساع متعددة حدود لاجندر واخذ التقريب لأول حدين إذ يمثل الحد الأول الجزء المتناظر ويمثل الحد الثاني الجزء غير المتناظر من دالة التوزيع على التوالي. أما حد الاستطارة لمعادلة لبولتزمان للانتقال فقد تم حساب الاستطارة القطبية البصرية التي تكون مهيمنة عند المجالات الواطنة في منخفض الطاقة المركزي (000). بعد إجراء عمليات حسابية طويلة ومعقدة وفصل المتغيرات وإيجاد f_i و f_{i+1} و f_{i-1} تم حل المعادلة عددياً باستخدام طريقة الفروق المحددة Finite Difference Method وباستخدام طريقة المصفوفات في فضاء الطاقة وذلك بإعداد برنامج حسابي بلغة MATLAB للحصول على دالة توزيع الإلكترونات لبولتزمان كدالة للطاقة.

4. نتائج حسابات دالة التوزيع لبولتزمان المعتمدة على الطاقة:

عند دراسة دالة التوزيع للإلكترون كدالة للطاقة في شبه الموصل المركب GaAs عند درجة حرارة الغرفة 300 K ويتسليط مجالات كهربائية واطئة ضمن المدى (0.5 - 5.95) kV/cm عند الطاقات الواطنة في منخفض الطاقة المركزي (ادنى من فرق الطاقة بين منخضي الطاقة $\Gamma - L$ والتي هي بحدود 0.3 eV).

دُرِس سلوك الاستطارة القطبية البصرية باعتبارها الية استطارة الأساسية في هذه الدراسة مع الطاقة بدلالة زمن استرخاء والذي يمثل مقلوب معدلات الاستطارة كدالة للطاقة. ووجدنا انه عند الطاقات إلى 0.1eV كان هناك زيادة غير خطية في زمن الاسترخاء مع

الطاقة إذ أن الكترونات ضمن هذا المدى تفقد طاقتها بشكل كبير أما بعد 0.1eV نلاحظ استقرارا في منحنى زمن الاسترخاء وهذا يعني نقصان في مقدار الطاقة المفقودة للإلكترونات وكانت هذه النتيجة متفقة مع نتائج البحث [17]. كما هو مبين في الشكل (1).

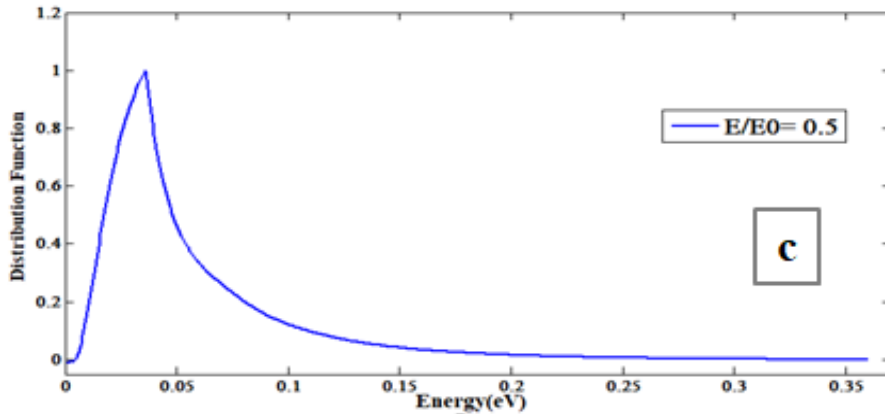
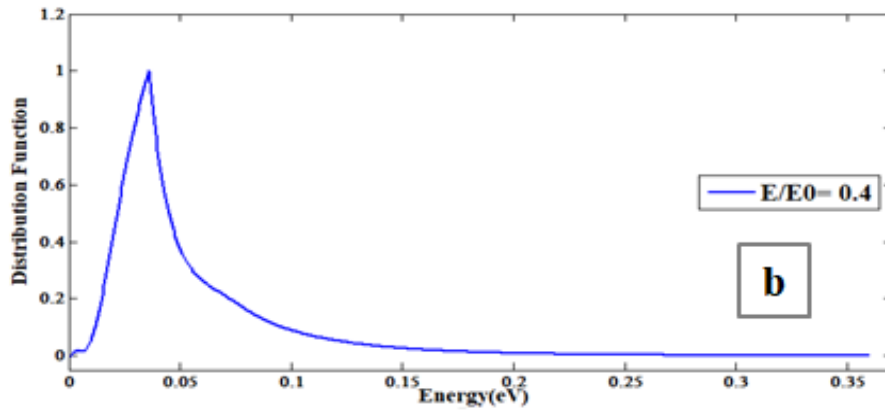
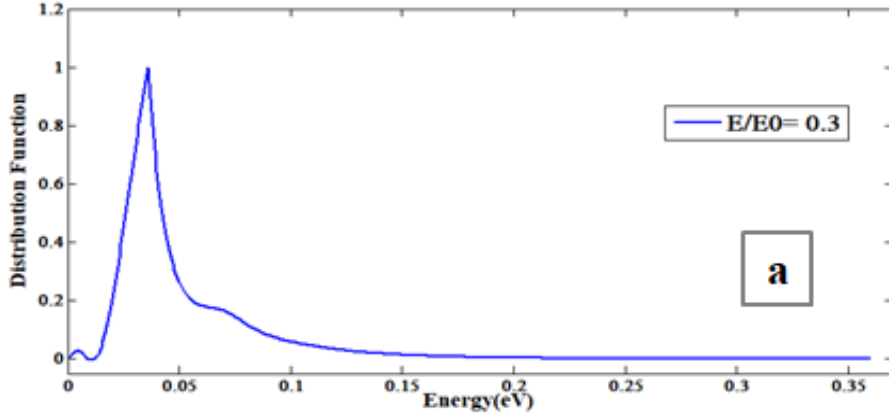


الشكل (1): زمن الاسترخاء لاستطارة الإلكترونات في منخفض طاقة المركزي (000) كدالة للطاقة GaAs باعتبار منخفض الطاقة المركزي كروية. أحتسبت دالة التوزيع عند المجالات الواطئة كما مبين في الشكل (2(a, b and c)), إذ يمكن ملاحظة انه عندما يكون المجال يساوي $0.3 E_0$ فان عدد الإلكترونات التي تمتلك طاقات عالية يكون قليلا جدا ويظهر ذلك من خلال دالة توزيع ماكسويل والتي تكون ذات اتساع دقيق جدا عند قمة التوزيع وتكون عندها الإلكترونات ذات حركة اهتزازية حول مواضع استقرارها لا تسمح لها بالحركة لكون طاقة الإلكترونات قليلة جدا. ومع زيادة المجال إلى $0.4 E_0$ تحصل زيادة قليلة في طاقة الإلكترونات وتكون ملحوظة من خلال زيادة في اتساع قمة التوزيع قليلا وإزاحته باتجاه زيادة الطاقة ويعزى هذا إلى كون استطارة الإلكترونات مع الفونونات القطبية البصرية هي الية استطارة غير مرنة المهيمنة عند المجالات الواطئة ولذلك فان الإلكترونات تفقد جزءا من الطاقة القليلة المكتسبة من المجال كما مبين في الشكل (2b). ويمكن ملاحظة أن اتساع دالة التوزيع عند ذروة المنحنى عندما يكون المجال $0.5 E_0$ ، إذ انه مع زيادة المجال المسط فان عملية استطارة الفونونات القطبية البصرية شبه المرنة تزداد نتيجة لزيادة طاقة الإلكترونات. ويلاحظ ان هناك انحرافاً ضئيلاً لذروة المنحنى باتجاه زيادة الطاقة. كما مبين في الشكل (2c) [5,8,11].

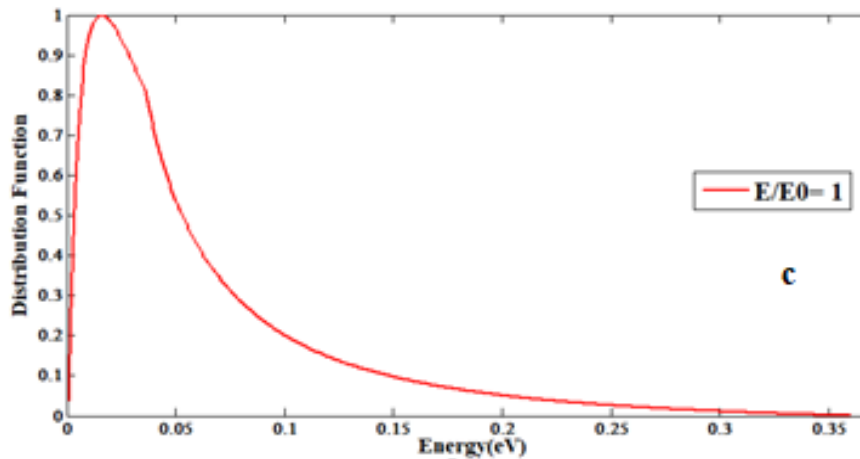
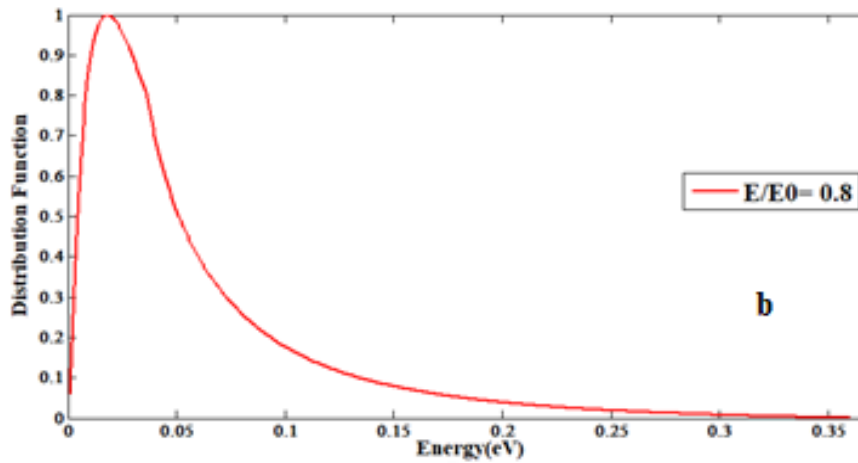
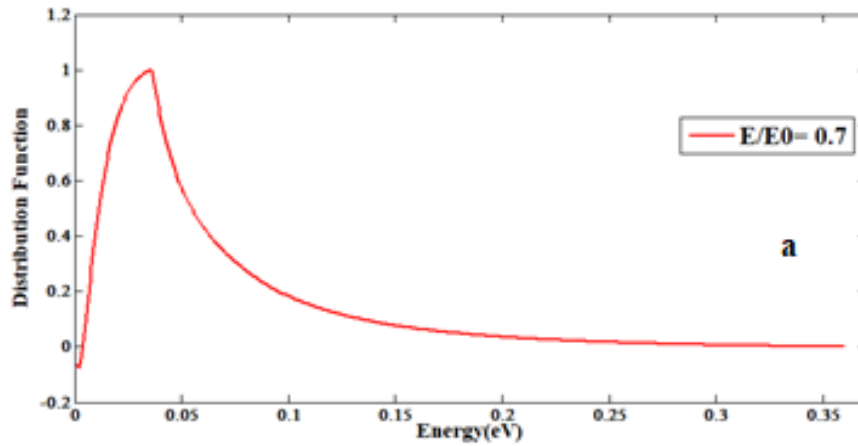
ويلاحظ عند زيادة المجال الكهربائي $(0.7, 0.8 \text{ and } 1) E_0$ كما هو مبين في الشكل (3(a, b, and c)) أن هناك زيادة في اتساع دالة التوزيع ولطاقات مختلفة عند المجال $0.7 E_0$ مع انحراف ذروة المنحنى باتجاه مديات الطاقة الأعلى (3a). كما نلاحظ عند المجالات $0.8 E_0$ و $1 E_0$ أن هناك زيادة مفاجئة جدا في منحنى دالة توزيع مع الطاقة وهذا يعني زيادة كبيرة في عدد الكترونات التي تمتلك طاقة كبيرة مع اتساع نسبي في دالة التوزيع العيارية عن دالة التوزيع المتجانسة في حالة التوازن كما مبين في الشكل (3b,c). وجدنا أن توزيع الإلكترونات في منخفض طاقة المركزي Γ وضمن المجالات القليلة، اقل من مجال العتبة $E_0=5.95 \text{ kV/cm}$ ، بصورة عامة، يكون توزيعا ماكسويلا تقريبا.

وطُبقت معادلة بولتزمان التي حصلنا عليها لحساب دالة التوزيع عند المجالات العالية إذ أخذ تأثير الاستطارة البصرية القطبية فقط بنظر الاعتبار. ويتبين من الشكل (4) دالة التوزيع الكترون كدالة للطاقة لشبه الموصل ارسنايد الكاليوم وبتسليط مجالات كهربائية عالية اكبر من مجال العتبة ($E_0= 5.95 \text{ kV/cm}$) ولمدى من المجالات العالية $(20-2) E_0$ ، إذ وجدنا أن التوزيع كان غير صحيح وذلك لعدم اخذ كل الاستطارات الناتجة من الانتقال للإلكترونات إلى منخفضات طاقة عالية والتي يهيمن عليها الاستطارة ما بين منخفضات

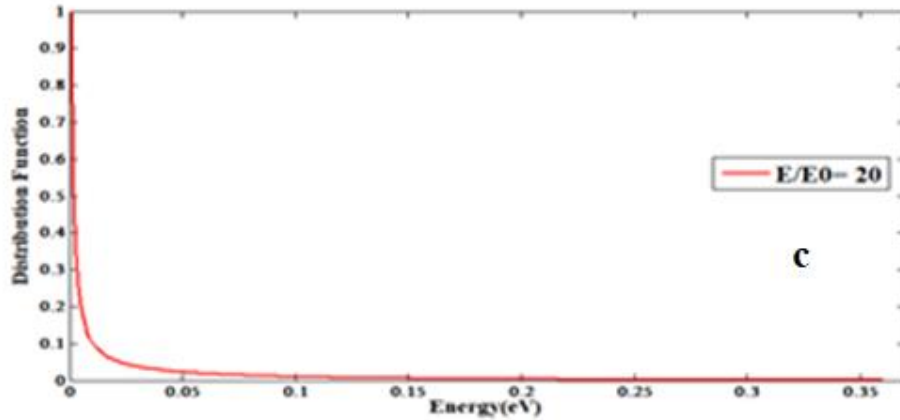
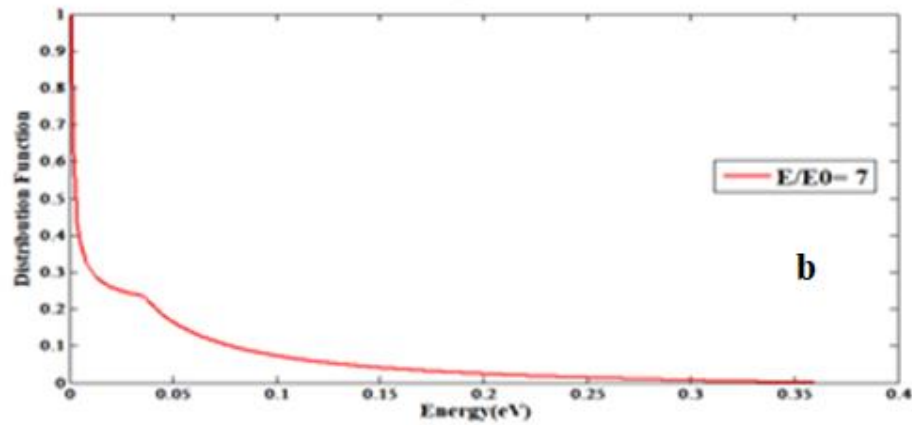
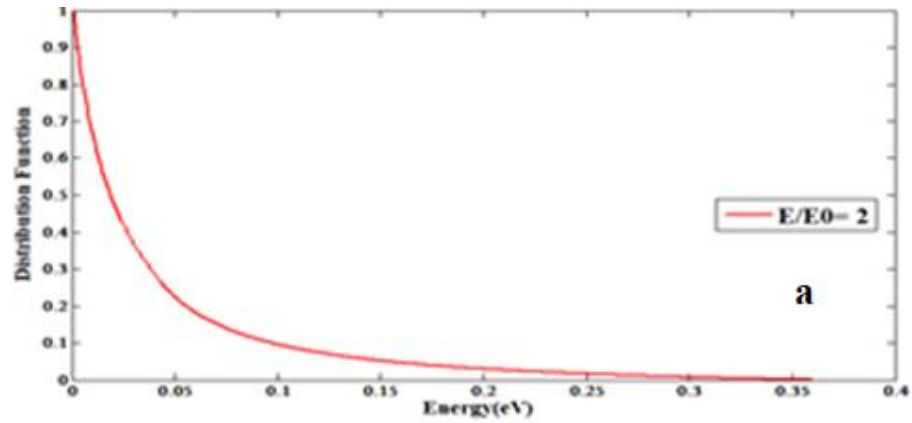
الطاقة (intervals scattering) فضلا عن كون تركيب سطوح الطاقة الثابتة بيضويا في منخفضات الطاقة العليا في فضاء الزخم، في حين كانت سطوح الطاقة في منخفض الطاقة المركزي كروية، ولذلك نحتاج إلى تقريب تحويل منخفضات الطاقة إلى سطوح طاقة ثابتة كروية باستعمال مصفوفة التحويل هيرنك- فونك وذلك لتقريب الحل باستخدام اتساع متسلسلة حدود لاجندر.



الشكل (2): دالة التوزيع الكترون كدالة للطاقة في منخفض طاقة المركزي $\langle 000 \rangle$ لشبه الموصل GaAs عند درجة حرارة الشبيكة 300 K عند مجالات كهربائية $E = 0.3 E_0$ kV/cm، $E = 0.4 E_0$ kV/cm، $E = 0.5 E_0$ kV/cm مبينة في الأشكال a، b، c على التوالي. ($E_0 = 5.95$ kV/cm).

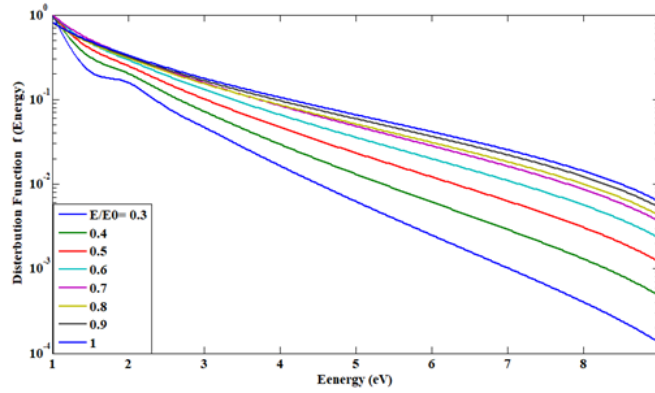


الشكل (3): دالة التوزيع الكترون كدالة للطاقة في منخفض طاقة المركزي (000) لشبه الموصل GaAs عند درجة حرارة الشبكة 300 K عند مجالات كهربائية $E = 0.7 E_0$ kV/cm، $E = 0.8 E_0$ kV/cm، و $E = 1 E_0$ kV/cm مبينة في الأشكال a، b، c على التوالي. ($E_0 = 5.95$ kV/cm).



الشكل (4): دالة التوزيع الكتلون كدالة للطاقة في منخفض طاقة المركزي (000) لشبه الموصل GaAs عند درجة حرارة الشبكة 300 K عند مجالات كهربائية $E = 2 E_0$ kV/cm، $E = 7 E_0$ kV/cm و $E = 20 E_0$ kV/cm مبينة في الأشكال a، b، c على التوالي. $E_0 = 5.95$ kV/cm).

يبين الشكل (5) دالة التوزيع الإلكترونيات لمديات مختلفة من المجال الكهربائي كدالة للطاقة وعند درجة حرارة الغرفة وجدنا أن المنحنيات تنحرف عن سلوك توزيع ماكسويل (أي تصبح غير خطية) عندما كان المجال يساوي $0.3 E_0$ ويزداد الانحراف عن الخط المستقيم بزيادة المجال المسلط والذي يعني الانحراف عن توزيع ماكسويل والذي يتمثل بالخط المستقيم كما وجدنا أيضا أنه كلما ازدادت شدة المجال الكهربائي المسلط فإن المنحنيات تنحرف إلى الأعلى، أي انه عند المجالات الواطئة تكون المنحنيات قريبة من التوزيع الماكسويلي وهذا متفق مع دراسات السابقة [15],[19].



الشكل (5): دالة التوزيع الإلكترونيات كدالة للطاقة في منخفض طاقة المركزي (000) عندما تكون سطوح الطاقة كروية لشبه الموصل GaAs عند درجة حرارة الشبكة 300 K . ($E_0 = 5.95 \text{ kV/cm}$).



الشكل (6): المخطط الانسيابي لحساب دالة التوزيع الكترون.

5: الاستنتاجات Conclusions:

في هذا البحث تم دراسة توزيع الإلكترونات لشبه الموصل المركب GaAs باستخدام معادلة الانتقال شبه الكلاسيكية لبولتزمان ولمدى من المجالات الكهربائية الواطنة. إذ استخدمت طريقة تحليلية- عددية لحل المعادلة التكاملية- التفاضلية لبولتزمان وحلها باستخدام الماتلاب. وتم استنتاج ما يأتي:

1- عند دراستنا لاستطارة القطبية البصرية كدالة للطاقة استنتاجنا أن هذه الاستطارة غير مرنة للمجالات الواطنة جدا اقل من $0.1 E_0$ أما عند المجالات العالية فإنه يحصل فقدان قليل لطاقة الكترون.

2- عند المجالات الواطنة جدا الى $0.3 E_0$ ومن خلال أحد مصفوفة 360×360 فان دالة التوزيع التي حصلنا عليه تكون ذات توزيع ماكسويلي. اما بالنسبة للمجالات من $1-0.3$ من مجال العتبة 5.95 kV/cm ، فقد لاحظنا ان هناك انحرافاً قليلاً في دالة التوزيع واتساع ويصبح توزيع الإلكترونات مقاربا لتوزيع ماكسويل.

3- عند تطبيق معادلة بولتزمان للانتقال التي تم الحصول عليها على المجالات العالية وجدنا أن النتائج كانت غير دقيقة وذلك لعدم اخذ كل الاستطارات التي تدخل في حساب دالة التوزيع عند منخفضات الطاقة العليا

شكر وتقدير

نقدم شكرنا وامتناننا لجامعة الموصل والشكر موصول لعمادة كلية التربية للعلوم الصرفة وقسم الفيزياء للمساعدة في تسهيل متطلبات البحث. كما ونقدم فائق شكرنا وتقديرنا لحضرة الدكتور ممتاز محمد صالح لما أبداه من ملاحظات قيمة في إنجاز هذا البحث.

References

1. J.Mckelvey, "Solid state and Semiconductor Physics", *Harper & Row*, 2018.
2. D. Neamen, "Semiconductor Physics and devices: basic principles", *McGraw-hill*, 2003.
3. S. Chakrabarty, A. Mandia, B. Muralidharan, S. & S. Bhattacharjee, "Semi-classical electronic transport properties of ternary compound AlGaAs₂: role of different scattering mechanisms", *Journal of Physics: Condensed Matter*, 32(13), 135704, 2019.
4. B. Nag, "Electron transport in compound semiconductors", (Vol. 11). Springer Science & Business Media, 2012.
5. H. Lee, "Electron transport properties of gallium arsenide, gallium aluminum arsenide and indium phosphide" ,(Ph.D dissertation, University of Ottawa (Canada)),1978.
6. T. Thi, "Numerical study of electro-thermal effects in silicon devices" ,(Doctoral dissertation, *Université Paris Sud-Paris XI*),2013.
7. D. Rode, "Electron mobility in direct-gap polar semiconductors", *Physical Review B*, 2(4), 1012,1970.
8. G.Warren, "Low field transport properties of a GaAs/Ga_{1-x}Al_xAs superlattice", (Doctoral dissertation, *University of Warwick*),1988.
9. N. Goldsman, Y. Wu & J. Frey, "Efficient calculation of ionization coefficients in silicon from the energy distribution function", *Journal of applied physics*, 68(3), 1075-1081,1990.
10. N. Goldsman, L. Henrickson & J. Frey, " A physics-based analytical/numerical solution to the Boltzmann transport equation for use in device simulation", *Solid-state electronics*, 34(4), 389-396,1991.
11. M. Lundstrom, "Fundamentals of carrier transport", 2^{ed} edition, Cambridge University Press, 2000.
12. W. Fawcett, A. Boardman & S. Swain,(1970)."Monte Carlo determination of electron transport properties in gallium arsenide", *Journal of Physics and Chemistry of solids*, 31(9), 1963-1990,1970.
13. D. Howarth & E. Sondheimer, "The theory of electronic conduction in polar semi-conductors", *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 219 (1136), 53-74,1953.

14. N. Cavassilas, F. Aniel, G. Fishman & R. Adde, "Full-band matrix solution of the Boltzmann transport equation and electron impact ionization in GaAs", *Solid-State Electronics*, 46(4), 559-566,2002.
15. J. Požela & A. Reklaitis, "Electron transport properties in GaAs at high electric fields", *Solid-State Electronics*, 23(9), 927-933,1980.
16. C. Jacoboni, "Theory of electron transport in semiconductors: a pathway from elementary physics to nonequilibrium Green functions ", (Vol. 165). Springer Science & Business Media, 2010.
17. E. Conwell & M. Vassell, "High-field distribution function in GaAs", *IEEE Transactions on Electron Devices*, (1), 22-27,1966.
18. M. Majed," Solving Boltzmann Transport Equation in Semiconductor with an indirect band", M. Sc. thesis In physics, University of mosul,2020. (in Arabic)
19. E. Conwell & M. Vassell," High-field transport in n-type GaAs", *Physical Review*, 166(3), 797,1968.
20. Y. Peter & M. Cardona, "Fundamentals of semiconductors: physics and materials properties", *Springer Science & Business Media*, 2010.
21. C. Hamaguchi, & C. Hamaguchi, "Basic semiconductor physics" ,(Vol. 9, pp. 443-510). Berlin: *Springer-Verlag*, 2010.
22. A. Abbas," Theoretical investigation to solve the space-dependent Boltzmann transition equation in silicon", Ph.D. dissertation In physics, University of mosul,2010. (in Arabic) .
23. H. Callen, "Electric breakdown in ionic crystals", *Physical Review*, 76(9), 1394, 1949.
24. H. Fröhlich,"Theory of electrical breakdown in ionic crystals", *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 160(901), 230-241,1937.
25. O. Johnson & L. Oluwaseun, "Crank-Nicolson and modified Crank-Nicolson scheme for one dimensional parabolic equation", *International Journal of Applied Mathematics and Theoretical Physics*, 6(3), 35-40,2020.
26. M. Al-Robe,"Finite Difference and Finite Element Methods for solving Elliptic partial Differential Equations", M. Sc. thesis In Applied Mathematics, An- Najah National University,2016.