طرق هندسية جديدة لبرهان وجود الشفرات الخطية ثلاثية الأبعاد $[97, 3, 87]_{11}$, $[143, 3, 131]_{13}$

أ.م.د. ندى ياسين قاسم يحيى
قسم الرياضيات
كلية التربية للعلوم الصرفة
جامعة الموصل
nada.qasim@yahoo.com

مصطفى ناظم سالم / طالب ماجستير
قسم الرياضيات
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة الموصل
dodo2me66@yahoo.com

تاريخ الاستلام
2017 /12 /27

تاريخ القبول
2018 /03/06

ABSTRACT

In this paper we applied new geometric methods for prove existence three dimensional linear $[97,3 ,87]_{11}$ and $[143,3,131]_{13}$ codes theorems [(1.4.4), (1.5.5)].

Keywords: Algebraic geometry, linear [n, k ,d]q codes, three- dimensional codes and the Griesmer bound, (n, r)_arc in projective geometries; Optimal linear codes.

الخلاصة

تم في البحث تطبيق طرق هندسية جديدة لبرهان وجود الشفرات الخطية ثلاثية الابعاد $[97,3,87]_{11}$,$[143,3,131]_{13}$ المبرهنتين [(1.4.4), (1.5.5)].

<u>الكلمات المفتاحية</u>: الهندسة الجبرية، الشفرات $[n \ ,k \ ,d]_q$ الخطية، الشفرات ثلاثية الابعاد وقيد، Griesmer الأقواس_(n ,r) في المستوي الاسقاطي, الشفرات الخطية المثلة.

المقدمة:-

الشفرة الخطية أو باركود هي تمثيل ضوئي لبيانات قابلة للقراءة من قبل الحواسيب/ المكائن في الاصل كانت الشفرة الخطية تمثّل البيانات في خطوط العُرض والفراغات بين الخطوط المتوازية، ويمكن أن نطلق عليها الرموز أو الشفرات الخطية احادية البُعد. الشفرات الخطية تأتي أيضا بأنماط مربعات أو

نقاط أو أشكال سداسية أو أنماط هندسية أخرى ضمن صور يطلق عليها الرمز أو شفرات المصفوفة ثنائية الأبعاد، وعلى الرغم من أن الانظمة الثنائية تستخدم الرموز أكثر من الخطوط (الخيوط)، فإنهّا عموما يطلق عليها شفرات خطية أيضا، أول من اخترع الباركود هو "ماكس بادك" سنة 1880 إلا أنه ونظرا لضيق ذات اليد لم ير مشروعه النور، وفي سنة 1932 قام طالب الدراسات العليا "والاس فلينت" بكتابة بحث "البقالة الألي" في كلية إدارة الأعمال بجامعة هارفارد شرح فيه استخدام هذا النظام لأتمتة نظم تدفق البقالة من الرفوف ونظرا لأن الولايات المتحدة كانت تمر بالازمة الاقتصادية فلم تنفذ هذه الفكرة وفي سنة 1948 قام "برنارد سلفر" وهو طالب متخرج من معهد دريكسل التكنولوجي بالتعاون مع أصدقائه "نورمان جوزيف" و "ودلاند ونورمان جوهانسن" بوضع أول نظام يعمل بالحبر فوق البنفسجي لأحد سلاسل المتاجر في فيلادلفيا لقراءة المنتجات وقت الخروج، ولكن ونظرا لتكلفة هذا النظام باء بالفشل، قام بعدها ودلاند بالعمل على تطوير النظام وتقليل تكلفته وقام بتسجيل براءة اختراعه يوم 7أكتوبر سنة 1952 وشهد هذا الإختراع نجاحا واسعاً.

إن من أهم تطبيقات الهندسة الجبرية هي الشفرات الخطية $[n,k,d]q$، كما يعرف القوس (k,n)_ على انه مجموعة من النقاط تتقاطع مع خطوط المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ بعدد محدد من النقاط بحيث يوجد خط واحد على الأقل يحتوي على n من النقاط فضلا عن إن كل خط في القوس يحتوي على الاقل n من النقاط، كذلك تعرف المجموعة القالبية t_ على أنها متمم للقوس (k,n)_ تحتوي على مجموعة من النقاط بحيث كل خط في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ يقطع المجموعة القالبية بما لا يقل عن t من النقاط ويوجد خط يقطع المجموعة القالبية ب t من النقاط، فتعرف الشفرة الخطية $[n,k,d]q$ على أنها نظام ثلاثي ذو طول n وبعد k مع وجود اقصر مسافة بين الشفرات d.

تم في البحث تطبيق طرق هندسية جديدة لبرهان وجود الشفرات الخطية$[143,3,131]_{13}$,$[97,3,87]_{11}$ ثلاثية الابعاد المتمثلة بالخوارزمية الاولى المذكورة في بند(4.4)مبرهنة(1.4.4) والخوارزمية الثانية المذكورة في بند(5.5) مبرهنة(1.5.5).

وتم ايضا استحداث خوارزمية جديدة لعملية البناء الهندسي على المجموعة القالبية-(36,2) وعلاقتها بالشفرة الخطية $[97,3,87]_{11}$ في المستوي الاسقاطي $PG(2,11)$ واستخدمت لأول مرة على الحقل $q=11$ بالاعتماد على شروط جديدة، الخوارزمية تهدف الى تحسين المجموعة القالبية المزدوجة والحصول على شفرة الخطية جديدة $[97,3,87]_{11}$، فضلا عن ذلك استحدثنا خوارزمية ثانية جديدة في المستوي الاسقاطي $PG(2,13)$ لغرض الحصول على الشفرة الخطية $[143,3,131]_{13}$.

تعريف [11]:

يقال عن متعددة الحدود F(X) بأنها غير قابلة للتحليل إذا وفقط إذا لا يمكن التعبير عنها بشكل حاصل ضرب حدوديتين، كما يقال عن متعددة حدود F(X) في $K=[X_1, X_2, \dots, X_n]$ أنها متجانسة من الدرجة d أذا كانت جميع حدودها من الدرجةd.

تعريف [11]:

لتكن Z_p تمثل حلقة معرفة على الحقل Z وليكنp هو عدداً أوليّ، فإذا كانت F(X) تمثل متعددة حدود غير قابلة للتحليل معرفة على Z_p فإنَّ

$$GF(q) = GF(p^h) = Z_p(x)/F(x) = GF(p)/F(X)$$
$$= \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_{h-1} t^{h-1}, a_i \in Z_p(x), f(x) = 0$$
$$= \{\sum_{i=0}^{h-1} a_i t^i; a_i \in GF(p), f(t) = 0\}$$

ويسمى حقل كالوا (Galois Field) من الرتبة $q = p^h$، مع ملاحظة أن كل عنصر GF(p) يحقق المعادلة $X^q = X$، لكل $x \in GF(q)$، من الأمثلة على حقل كالوا هي:

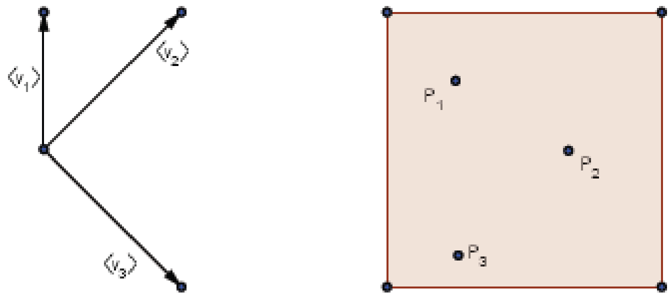
1. $GF(2) = \{0,1 | 2 = 0\}$
2. $GF(3) = \{0,1, -1 \mid 3 = 0\}$
3. $GF(4) = \{0,1, \alpha, \alpha^2 \mid 2 = \alpha^2 + \alpha + 1 = 0, x^4 - x = 0\}$
4. $GF(5) = \{0,1, -1,2, -2 \mid 5 = 0\}$
5. $GF(7) = \{0,1, -1,2, -2,3, -3 \mid 7 = 0\}$.

مبرهنة [11, 22]:

ليكن GF(q) يمثل حقل كالوا، فإن لكل $\alpha \in GF(q)$ يمثل حلاً لمتعددة الحدود ويسمى جذراً أو عدداً أوليا.

تعريف الفضاء الاسقاطي The Projective space [11] :

ليكن V(n+1,k) يمثل فضاء متجهات ذا بعد n+1 معرفاً على الحقل K، على فرض وجود x, y معرف على فضاء المتجهات v^* باستثناء نقطة الأصل {0} حيث أن $v^* = v(n+1, k) - \{0\}$ $y = (y_0, \dots, y_n), x = (x_0, \dots, x_n)$ فانه في حالة وجود عنصر غير صفري ليكن t يحقق العلاقة $x = ty$ لكل، $t \in k^* = k - \{0\}$ فضلا عن ذلك وجود علاقة التكافؤ R على v^* فأن صفوف التكافؤ تسمى نقاط المستوي الاسقاطي، حيث يرمز لمستوي الاسقاطي ذي البعد n على الحقل k بالرمز PG(n,k) أما أذا كان K=GF(q) يرمز له بالرمز PG(n,q).

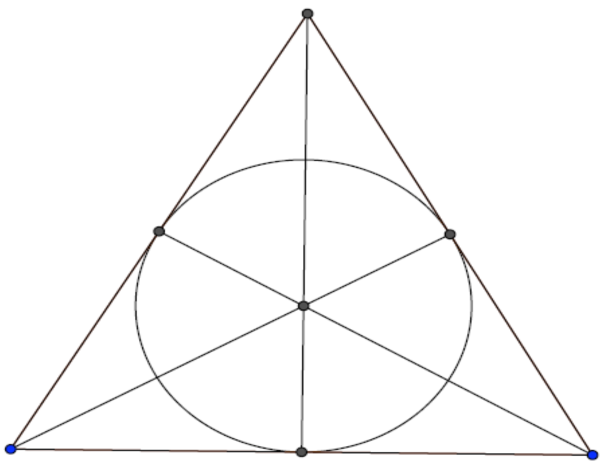


الشكل (1.1) يمثل فضاء المتجهات v(3,q) والفضاء الاسقاطي PG(2,q)

مثال: جد الفضاء الاسقاطي $PG(2,2)$ من خلال استخدام فضاء المتجهات v علما أن:

$$q = Z_2 \,, n = 2 \,, n + 1 = 3$$
$$v = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$$
$$v^* = v - \{0\}$$
$$v^*(3,2) = v - \{(0,0,0)\} = PG(2,2)$$

والشكل الآتي يوضح نقاط $PG(2,2)$



شكل (2.1) يوضح نقاط المستوي PG(2,2)

تعريف الفضاء الجزئي The Subspace [11, 16, 22]:

يعرف الفضاء الجزئي ذو البعد m في المستوي الاسقاطي PG(2,q) بأنه مجموعة كل النقاط الموجودة حيث أن كل المتجهات التي تمثل النقاط مع نقطة الأصل تشكل فضاءً جزئياً من V ذو البعد n+1، الفضاء الجزئي ذو البعد 3,2,1,0 على التوالي يسمى نقطة، خطاً، مستوياً، سطحاً والفضاء الجزئي n-1 يسمى فضاء أولي.

مبرهنة: [12]

لتكن s هي مجموعة الفضاءات ذات البعد r في المستوي $PG(n,q)$ على فرض $|s| = \varphi(r,n,q)$، وليكن $N(s,r,n,q)$ هو عدد الفضاءات ذات البعد r خلال الفضاء ذي البعد s في الفضاء$PG(r,n,q)$ فأن:

1. $\varphi(0,n,q) = \theta(n) = (q^{n+1} - 1)/(q - 1).$
2. $\varphi(r,n,q) = [n - r + 1, n + 1]_{-} /[1, r + 1]_{-}.$
3. $N = (s,r,n,q) = [r - s + 1, n - s]_{-}/ [1, n - r]_{-}$

حيث أن
$$[r,s] = \begin{cases} \prod_{i=r}^{s}(q^i - 1) & s \geq r \\ 1 & s < r \end{cases}$$

نتيجة [11]:

المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ المعرف على حقل كالوا $GF(q)$ هو فضاء ذو البعد 2 يحتوي على $q^2 + q + 1$ من الخطوط و $q^2 + q + 1$ من النقاط وكل خط يمر من خلال $q + 1$ من النقاط وكل نقطة تقع على $q + 1$ من الخطوط.

تعريف [11]:

يقال عن النقاط $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ أنها تقع على استقامة واحدة إذا كان محدد تلك النقاط يساوي صفر.

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

وبخلاف ذلك فإنَّ النقاط لا تقع على استقامة واحدة.

تعريف [15, 22]:

ليكن $\prod, \prod^*$ فضائيين في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$، فأن الإسقاط T هو تقابل يمثل بمصفوفة مربعة غير منفردة بحيث إذا كان $P(X_1) = P(X)T$ فأن لكل $t \in GF(q) - \{0\}$ يوجد.$tx_1 = xT$

تعريف [11]:

إذا كانت $F(X) = x^{n+1} - a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \cdots - a_0$ متعددة حدود أحادية فإنَّ المصفوفة المرافقة $C(F)$ هي مصفوفة مربعة ذات سعة n+1:

$$C(F) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ a_0 & a_1 & \cdots & & a_n \end{bmatrix}$$

نقاط الفضاء الاسقاطي PG (2,11) وPG (2,13) : _ [1]

باختيار النقطة$p_1 = (1\ 0\ 0)$ كنقطة ابتدائية في المستوي فإن باقي نقاط المستوي يمكن إيجادها بواسطة الضرب الأيمن للنقطة p_1 بمصفوفة الإسقاط الدوار T وذلك حسب العلاقة الآتية:

$$p_i = p_{i-1} \quad \forall_i = 2,3,\ldots\ldots,q^2+q+1$$

حيث ان

T= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & \end{bmatrix}$ عند q=11 و T= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & \end{bmatrix}$ عند q=13

ويمثل الجدول (1.1) نقاط المستوي الاسقاطي (PG (2,11 .

جدول (1.1)

I	P_i		
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0	0	1
3	1	0	2
....		....	
131	1	1	0
132	0	1	1

ويمثل الجدول (2.1) نقاط المستوي الاسقاطي (PG (2,13 .

جدول (2.1)

i	P_i		
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0	0	1
3	1	0	7
.			
181	1	12	0
182	0	1	12

خطوط المستوي الاسقاطي PG(2,11)وPG(2,13) :[1]

خط المالانهاية سيكون هو الخط الأول في المستوي الاسقاطي PG(2,11)أي أن:

131 ,117, 113, 76 ,69 ,34,61 ,29 ,23 ,10 ,1 , 0 نحصل على الخط الاول من خطوط المستوي. وعندما تكون احداثيات النقطة$p_i=(x_i,y_i,o)$ ولإيجاد باقي خطوط المستوي نطبق العلاقة الآتية: $L_i = L_{i-1}^{T}$, $\forall_i = 2,3,\ldots\ldots,q^2+q+1$

والجدول(3.1) يوضح خطوط المستوي الاسقاطي (PG(2,11.

جدول(3.1)

L_1	0 , 1, 10, 23, 29, 34,61, 69, 76 ,113 ,117, 131
L_2	1, 2,11,24,30,35,62,70,77,114,118,132
…	…
L_{133}	133,0,9,22,28,33,60,68,75,112,116,130

والجدول(4.1) يوضح خطوط المستوي الاسقاطي (PG(2,13

جدول(4.1)

L_1	1,2,9,25,38,42,60,108,120,129,135,140,154,182
L_2	2,3,10,26,39,43,61,109,121,130,136,141,155,183
…	…
L_{183}	183,1,8,24,37,41,59,107,119,128,134,139,153,4

الأقواس في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$

تعريف[4,5] : يعرف القوس في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ على أنه مجموعة من نقاط المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ تتقاطع مع جميع خطوط المستوي الاسقاطي بحيث يوجد خط واحد على الأقل يحتوي على n من النقاط، ولا يوجد خط يحتوي على n+1 من النقاط أو أكثر من ذلك، يرمز للقوس بالرمز (k,n)_ حيث k تمثل عدد نقاط المجموعة.

تعريف [4]: يسمى القوس $(k,n)\_$ قوساً تاماً في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ أذا كان القوس $(k,n)\_$ غير محتوى في القوس $(k+1,n)\_$.

تعريف [4]: إذا كان القوس $(k,n)\_$ تام فإنّهُ يحقق $(q+1-n)T_n \geq q^2+q+1-k$ وتصح حالة المساواة إذا وفقط إذا كأن $T_n = 1$ لكل نقطة من نقاط المستوي $PG(2,q) / k$.

تعريف [1]: يقال عن القوس $(k,n)\_$ بأنه أعظم ما يمكن إذا كان $k = (n-1)q + n$.

تعريف [1]: القاطع هو الخط I الموجود في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ والذي يحوي i من نقاط القوس $(k,n)\_$ أذا كأن: $|I \cap K| = i$ كما يسمى القاطع خطأ خارجياً إذا كأن $i = 0$، ويسمى قاطعاً أُحادياً إذا كان $i = 1$، ويسمى قاطعاً ثنائياً إذا كأن $i = 2$.

مبرهنة [16]: إذا كان K قوس $(k,n)\_$ في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$، وإنَّ T_iتمثل العدد الكلي للقواطع i _ للقوس،$(k,n)\_$ وإنَّ R_i تمثل عدد القواطع _ i للقوس$(k,n)_$ عند النقطة P والتي تنتمي إلى القوس K، وإنَّ S_i تمثل عدد القواطع _ i للقوس$(k,n)_$ عند النقطة Q والتي لا تنتمي إلى القوس K، وبالتالي فإنَّ المعادلات تحقق:

1. $\sum_{i=0}^{n} T_i = q^2+q+1$
2. $\sum_{i=1}^{n} iT_i = k(q+1)$
3. $\sum_{i=2}^{n} \frac{i(i-1)T_i}{2} = k(k-1)/2$
4. $\sum_{i=1}^{n} R_i = q+1$
5. $\sum_{i=2}^{n} (i-1)R_i = k-1$
6. $\sum_{i=0}^{n} S_i = q+1$
7. $\sum_{i=1}^{n} iS_i = k$
8. $iT_i = \sum_{p} R_i$
9. $(q+1-i)T_i = \sum_{Q} S_i$

المجموعات القالبية _t :[2,3]

تعريف:

لتكن B مجموعة من النقاط في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$، يقال عن المجموعة B بأنها مجموعة قالبية _t، إذا كان لكل خط في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ يقطع B بما لا يقل عن t من النقاط الموجودة ويوجد خط يقطع B ب t من النقاط بحيث:

1. تسمى B مجموعة قالبية أحادية (Blocking sets) أذا كأن $t=1$
2. تسمى B مجموعة قالبية مزدوجة (Double Blocking sets) أذا كأن $t=2$
3. تسمى B مجموعة قالبية ثلاثية (Trible Blocking sets) أذا كأن $t=3$

كما يقال إنَّ المجموعة القالبية _t بأنها تافهة (trivial) أذا كأن $|B \cap L| = q+1$

هذا يعني إنَّ قيمة المجموعة القالبية الفعلية تكون محصورة بين $t \le |B \cap L| \le q$ لأي خط من خطوط المستوي.

تعريف [2]:

يقال عن المجموعة القالبية B في المستوي الاسقاطي PG(2,q) بأنها مجموعة قالبية مزدوجة إذا كان كل خط من خطوط المستوي يمر على الأقل بنقطيين من نقاط المجموعة B أي إنَّ تكون قيمه t تساوي 2.

تعريف العلاقة بين القوس−(k,n) والمجموعة القالبية –t [1]:

تعرف العلاقة بين المجموعة القالبية _t والقوس_(k,n) على أنها علاقة المتمم بينهما، بحيث يكون القوس هو متمم لمجموعة القالبية_t والعكس صحيح، بحيث يمكن إيجاد المتمم للقوس أو المجموعة القالبية باستخدام العلاقة الأتية:

$$|k| = |B^c| = q^2 + q + 1 - |B|$$
$$n + t = q + 1$$

ومثال على ذلك إذا كانت B عبارة عن مجموعة قالبية_ 3 في المستوي الاسقاطي PG(2,5) إضافة إلى إنَّ $|B| = 10$ يمكن إيجاد القوس − (21,3)

$$|k| = |B^c| = 5^2 + 5 + 1 - 10$$
$$= 21$$
$$n + t = q + 1$$
$$n = 5 + 1 - 3 = 3$$

ينتج القوس−(21,3)، كما إنَّ إيجاد اصغر مجموعة قالبية _t يكافئ إيجاد اكبر قوس _(k,n) في المستوي الاسقاطي PG(2,q).

مبرهنة [2]: لتكن B مجموعة قالبية مزدوجة في المستوي الاسقاطي PG(2,q) فأنها تحقق:

1. إذا كان q<9 ، فإنَّ: $|B| \ge 3q$
2. إذا كان q=11,13,17 أو q=19 فإنَّ: $|B| \ge (5q + 7)/2$
3. إذا كان $19 < q = p^{2d+1}$ فإنَّ:
$$|B| \ge 2q + p^2\left\lceil (p^{d+1} + 1)/(p^d + 1) \right\rceil + 2$$
4. إذا كان $q > 4$، q عدد مربع فإنَّ: $|B| \ge 2q + 2\sqrt{q} + 2$

الشفرة الخطية أو الباركود(Barcode): [21,23]

الشفرة الخطية أو باركود هي تمثيل ضوئي لبيانات قابلة للقراءة من قبل الحواسيب، في الأصل كانت الشفرة الخطية تمثّل البيانات في مناطق خطوط العُرض والفراغات بين الخطوط المتوازية، ويمكن أن نطلق عليها الرموز أو الشفرات الخطية أحادية البُعد. الشفرات الخطية تأتي أيضا بأنماط مربعات أو نقاط أو أشكال سداسية أو أنماط هندسية أخرى ضمن صور يطلق عليها الرمز أو شفرات المصفوفة

ثنائية الأبعاد، على الرغم من أنَّ الأنظمة الثنائية تستخدم الرموز أكثر من الخطوط (الخيوط)، ألا أنها عموما يطلق عليها شفرات خيطية أيضا

9 87654 32109 8

أول استخدام للشفرات الخيطية كان لوضع علامات على عربات القطار، لكنها لم تكن ناجحة تجاريًا إلى أن تم استخدامها لأجل أنظمة مبيعات مراكز التسوق، وهي المهمّة التي أصبحت من خلالها الشفرات الخيطية عالمية تقريبا كما انتشر استخدامها إلى مهام أخرى أيضا.

استخدامات الشفرة الخطية

أن للشفرة الخطية استخدامات عديدة نذكر منها:

1. محلات البقالة والمتاجر حيث تصنف المنتجات في المخازن وتباع للجمهور بسهولة ويسر.
2. فهرست الوثائق وإدارة المستندات.
3. مكاتب تأجير السيارات وتذاكر الطيران والقطارات وإدارة البريد.
4. تذاكر المباريات والسينما والمسارح.
5. حتى أن الباحثين قاموا بوضع شفرة خطية صغيرة على النحل لتعقب عملية عادات التزاوج في هذه الحشرات.

كما يمكن استخدام الشفرات الخطية في كشف التلاعب والتزوير في المنتجات، وسوف يتم توضح ذلك في الفقرة القادمة.

أنواع الشفرات الخطية [21,23]

هنالك عدة أنواع من الشفرات الخطية تتخذ إشكالا مختلفة ذات أنماط متعددة تختلف من نوع إلى أخر ومن هذه الأنواع

1.GTIN-12:

0 36000 29145 2

رمز الباركود يتم وضع الرقم الأول والأخير دائما خارج رمزا للإشارة إلى المناطق الهادئة والتي هي ضرورية للماسحات الباركود للعمل بشكل صحيح.

2.EAN-13 (GTIN-13)

رمز الباركود. يتم وضع الرقم الأول دائما خارج رمزا، بالإضافة إلى الرمز (>) يستخدم للإشارة إلى المناطق الهادئة والتي هي ضرورية للماسحات الباركود للعمل بشكل صحيح.

3. ويكيبيديا المشفرة

وهنالك انواع اخرى مختلفة ذات اشكال وصور مختلفة منها.

كيفية تكوين الشفرة أو الباركود:

أن أي رمز أو شفرة يمكن أن تمثل شفرة خطية أذا كانت تحقق الشروط الآتية، كذلك فان أي رمز باركود يمكن أن يمثل شفرة خطية أذا حقق نفس الشروط:

1. $u, v \in C$ لكل $u + v \in C$

2. $a \in GF(q) \in C$ لكل $au \in C$

حيث ان C تمثل شفرة، a عنصر اختياري من عناصر احقل المعرفة عليه الشفرة، سبب وجود الشفرات او الباركود هو لحماية المنتج من عملية التزوير وما شابة ولاجل ذلك يمن التحقق من المنتجات من خلال الشفرة الخاثة بكل منتج، اذن لابد من وجود اختبار يتحقق من كون الباركود شفرة خطية او لا؟ فعلى سبيل المثال لتأكد من صحة المنتجات يمكن تطبيق حل نظري للشفرة الخاصة بكل منتج باستخدام الشروط الخاصة بلشفرات الخطية فإذا تحققت الشروط فان تلك المنتجات تكون سليمة وإذا لم تتحقق فهنالك مشكلة في المنتجات يجب معالجتها. بشكل عام فان أي شفرة متكونة من خطوط وأرقام، عدد تلك الأرقام وشكل الخطو والتي يحدد طبيعة الشفرة الخطية الشفرة الخطية. في المثال الأتي يتم استخدم شفرات خطية مختلفة التي تعتمد على الأرقام فقط لغرض كشف التزوير من خلال كون الباركود تمثل شفرة خطية أو لا ؟

عادة يتم الحل باستخدام طريقة تحويل الأعداد من النظام الاعتيادي إلى النظام الثنائي من خلال القاعدة التالية:

$2^n \;...\; 2^4\; 2^3\; 2^2\; 2^1\; 2^0$

حيث يتم ترتيب أي عدد مع عناصر المجموعة السابقة ذات القوى المتساوي (2) وإيجاد مجموع ذلك العدد من خلال جمع العناصر المناظرة لكل رقم:

$010 = 2^1 = 2$
$101 = 2^0 2^2 = 5$
$001 = 2^0\, 2^1 = 3$

مثال 1: أذا كان لدينا الباركود التالي.هل يمثل شفرة خطية أم لا ؟

9 87654 32109 8

نلاحظ ان الباركود السابق انه يتكون من مجموعة من الأرقام هي (987654321098) على التوالي وباستخدام قاعدة التحويل من نظام عشري إلى نظام ثنائي (0,1) ينتج لدينا الأعداد الآتية:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001

نختبر تحقيق الشروط الشفرات الخطية نلاحظ أن

$9+8 = 1001+1000=1000$
$7+5=0111+0101=0100$
$1+4=0001+0100=1010$

نلاحظ أن الشرط الأول يتحقق لأي عنصرين في الشفرة، هذا يعني أن المجموعة مغلقة

كذلك نلاحظ أن الشرط الثاني يتحقق أيضا

$2(9)=2(1001) =0000$
$2(5)=2(0101)=0000$
$3(8)=3(1000)=0001$

علما ان 2،3 هما عنصران حقل كالوا GF(q) لذلك فان الباركود يمثل شفرة خطية لأنه يحقق شروط الشفرات الخطية، وبالتالي فان المنتج الذي يحمل تلك الشفرة هو منتج سليم.

مثال 2: أذا كان لدينا الباركود الآتي. هل يمثل شفرة خطية أم لا ؟

نلاحظ من خلال الباركود السابق يتكون من مجموعة من الأرقام هي (5901234123457) على التوالي وباستخدام قاعدة التحويل من نظام اعتيادي إلى نظام ثنائي (0,1) ينتج لدينا الأعداد الآتية

0	1	2	3	4	5	7	9
0000	1000	0100	1100	0010	1010	1110	1001

نختبر تحقيق الشروط الشفرات الخطية نلاحظ أن

1+2=1000+0100=1100
9+7 = 1001+1110=0111

نلاحظ في حالة جمع عنصرين من عناصر الشفرة (9+7) لا يحقق الشرط الأول، لذلك فان الباركود لا يمثل شفرة خطية، وبالتالي فان المنتج الذي يحمل تلك الشفرة هو منتج غير سليم.

الشفرات الخطية $[17,18,19,20]$: The Linear$[n ,k ,d]_q$ Codes

تعريف [20]:

تعرف الشفرة الخطية $[n,k,d]_q$ على أنها نظام ثلاثية ذات بعد k حيث إنَّ n تمثل طول الشفرة مع عناصر من المجموعة $(1,\ldots,q)$ مع وجود اقصر مسافة d بين الشفرات الخطية المعرفة على حقل كالوا GF(q) التي يمكن التعبير عنها بشكل

$$d(C) = \min\{d(x,y): x , y \ \varepsilon \ C , x \neq y \}.$$

المشكلة الأساسية في الشفرات الخطية هي إنَّ عملية إيجاد وتحسين القيود التي تحدد كل شفرة على حالتين:

1. إيجاد $d_q(k,n)$ وهي تمثل أكبر قيمة للقيد الخاص بالشفرة الخطية $[n,k,d]_q$.
2. إيجاد $n_q(k,n)$ وهي تمثل أصغر قيمة للقيد الخاص بالشفرة الخطية $[n,k,d]_q$.

فتسمى الشفرة التي تحقق واحدة من هاتين القيمتين بشفرة المثلى، في حال كون المجموعة القالبية مزدوجة يمكن إيجاد اكبر قيمه لقيد الشفرات من خلال إيجاد متمم لقوس ومن ثمَّ الحصول على القيد الأعلى باستخدام المبرهنة (4.3.1)،

أما اصغر قيد للشفرة الخطية فيمكن إيجاده باستخدام المبرهنة الآتية:

مبرهنة [9]: جد n_q (k,d) التي تمثل اصغر قيمة لـ n التي تحقق وجود الشفرة الخطية $[n,k,d]_q$ تسمى الشفرة الخطية التي تحقق هذه القيمة الشفرة المثلة، ولمعرفة وايجاد القيد الأدنى للشفرة نستخدم علاقة Griesmer bound

$n_q(k,d) \geq g_q(k,d) = \sum_{j=0}^{k-1} \left\lceil \frac{d}{q^j} \right\rceil$

حيث تسمى الشفرة $[g_q(k,d), k, d]$ بشفرة Griesmer في المستوي الاسقاطي.

كما توجد أيضا علاقة بين القوس_(k,n) والشفرة الخطية $[n,k,d]_q$ في المستوي الاسقاطي PG(2,q)، يمكن توضيح تلك العلاقة من خلال المبرهنة الاتية:

مبرهنة [9]: توجد الشفرة الخطية $[n,k,d]_q$ اذا وفقط اذا كان القوس_(n,n−d) موجود في المستوي الاسقاطي PG(2,q).

ملاحظة: بشكل عام يتطلب إيجاد الحد الأدنى لقيد بالنسبة للشفرة الخطية مقارنة كل زوجين من الشفرات الخطية لغرض إيجاد اقصر مسافة.

تعريف [8]: لتكن C مجموعة جزئية من فضاء المتجهات v(n+1,k) فان C او أي مجموعة جزئية يمكن عدُّها شفرة خطية اذا وفقط اذا كانت تحقق:

1. $u, v \in C$ لكل $u + v \in C$

2. $a \in GF(q) \in C$ لكل $au \in C$

قضية: لتكن C مجموعة جزئية من فضاء المتجهات v(n+1,k)، فان Cتمثل شفرة

أذا تحقق أحد الشرطين

1. C مجموعة جزئية من فضاء المتجهات v(n+1,k)

2. مجموع أي شفرتين خطيتين في C يكون شفرة خطية فيC.

مثال: أي من المجموعة الجزئية التالية تمثل شفرة خطية

$C_1 = \{00, 01, 10, 11\}$
$C_2 = \{000, 011, 101, 110\}$
$C_3 = \{00000, 01101, 10110, 11011\}$
$C_4 = \{101, 111, 011\}$
$C_5 = \{000, 001, 010, 011\}$
$C_6 = \{0000, 1001, 0110, 1110\}$

نلاحظ من خلال المثال السابق ان كل من C_1 ,C_2 ,C_3,C_5 تمثل شفرة خطية لأنها تحقق الشروط، اما كلاً من C_4,C_6 لا تمثل شفرة خطية لأنها لا تحقق شروط الشفرة الخطية.

مبرهنة [7]: لكل شفرة خطية ثنائية تمتلك عدداً محدداً من القواعد يمكن أيجادها باستخدام العلاقة الاتية:

$\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{K-1} (2^k - 2^i)$

تعريف [7]: لتكن M مصفوفة مربعة ذات سعة nxn، حيث يمثل عناصر القاعدة لشفرة الخطية صفوف تلك المصفوفة عند ذلك تسمى المصفوفة بمصفوفة المولدة، مثال ذلك المصفوفة المولدة لشفرة

$$C_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \text{ هي } \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

تعريف [6]: لتكن C عبارة عن شفرة خطية $[n,k,d]_q$ على حقل كالوا GF(q) واذا كان a ∈ v(n,q) هذا يعني ان المجموعة {a+x|x ∈ C} =a+C تسمى مجموعة مصاحبة لشفرة خطية في فضاء متجهات.

مثال: لتكن {0000, 1011, 0101, 1110} = C فان المجموعة المصاحبة لهذه الشفرة تكون:

$$0000 + C = C$$
$$1000 + C = \{1000, 0011, 1101, 0110\},$$
$$0100 + C = \{0100, 1111, 0001, 1010\},$$
$$0010 + C = \{0010, 1001, 0111, 1100\}.$$

ولبرهان وجود الشفرات الخطية ثلاثية الابعاد$[143,3,131]_{13}$,$[97,3,87]_{11}$ بالاعتماد على الطرق الهندسية الجديدة والمتمثلة بالخوارزمية الاولى مبرهنة(4) والخوارزمية الثانية مبرهنة(5) و كما يلي:

الخوارزمية الاولى الجديدة لعملية البناء الهندسي للمجموعة القالبية_(36,2) وعلاقتها بالشفرات الخطية $[97,3,87]_{11}$ في المستوي الاسقاطي PG(2,11)

إنَّ من أهم مميزات هذه الخوارزمية واختلافها عن الخوارزمية السابقة المذكورة في المصدر[9] يكمن في اختيار الخطوط الأربعة بحيث تحتوي على أربعة نقاط مشتركة فقط وكذلك في النقاط المشتركة بين الخطوط الأربعة بحيث لا توجد نقطة من النقاط المشتركة تحقق معادلة المستقيم وأيضا هناك اختلاف في نقاط الحذف بحيث لا توجد أي نقطة من نقاط الحذف تحقق معادلة المستقيم، تتضمن الخوارزمية الخطوات العشرة الأتية:

مبرهنة (4): وجود الشفرات الخطية $[97,3,87]_{11}$ في المستوي الاسقاطي PG(2,11)

البرهان:

الخطوة 1: نقوم باختيار أربعة خطوط من خطوط المستوي الاسقاطي PG(2,11) تحتوي على أربعة نقاط مشتركة فيما بينها:

$$L_{54}: \overset{115}{(0,1,8)'}\ \overset{64}{(1,0,7)'}\ \overset{88}{(1,1,4)'}\ \overset{130}{(1,2,1)'}\ \overset{52}{(1,3,9)'}\ \overset{54}{(1,4,6)'}\ \overset{83}{(1,5,3)'}\ \overset{77}{(1,6,0)}$$
$$\overset{55}{(1,7,8)'}\ \overset{123}{(1,8,5)'}\ \overset{38}{(1,9,2)'}\ \overset{34}{(1,a,a)}$$
$$L_{55}: \overset{78}{(0,1,6)'}\ \overset{116}{(1,0,a)'}\ \overset{53}{(1,1,5)}\overset{35}{(1,2,0)'}\ \overset{84}{(1,3,6)'}\ \overset{124}{(1,4,1)'}\ \overset{89}{(1,5,7)'}\ \overset{65}{(1,6,2)}$$

$\begin{matrix} 55 & 56 & 131 & 39 \\ (1,7,8)' & (1,8,3)' & (1,9,9)' & (1,a,4) \end{matrix}$

$L_{56}: \begin{matrix} 36 & 79 & 132 & 117 & 57 & 54 & 40 & 90 \\ (0,1,2)' & (1,0,9)' & (1,1,0) & (1,2,2)' & (1,3,4)' & (1,4,6)' & (1,5,8)' & (1,6,a) \end{matrix}$

$\begin{matrix} 85 & 56 & 125 & 66 \\ (1,7,1)' & (1,8,3)' & (1,9,5)' & (1,a,7) \end{matrix}$

$L_{57}: \begin{matrix} 57 & 37 & 80 & 91 & 57 & 126 & 58 & 67 \\ (0,1,1)' & (1,0,1)' & (1,1,2) & (1,2,3)' & (1,3,4)' & (1,4,5)' & (1,5,6)' & (1,6,7) \end{matrix}$

$\begin{matrix} 55 & 41 & 86 & 118 \\ (1,7,8)' & (1,8,9)' & (1,9,a)' & (1,a,0) \end{matrix}$

$L_{54} \cap L_{55} = 55\ ,\ L_{54} \cap L_{56} = 54, L_1 \cap L_{57} = 55$

$L_{55} \cap L_{56} = 56\ , L_{55} \cap L_{57} = 55\ , L_{56} \cap L_{57} = 57$

الخطوة 2: تعويض نقاط التقاطع{54,55,56,57} في معادلة المستقيم $ax + by + cz = 0$ بشرط أن كل خطين يتقاطعان بنقطة لا تحقق معادلة المستقيم.

الخطوة 3: نقوم بعملية حذف 9 نقاط من مجموعة نقاط الخطوط الأربعة$L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$

يكون حذف النقاط بواقع نقطة واحدة من كلا من الخط الأول والخط الثالث وحذف أربعة نقاط من الخط الثاني وثلاثة نقاط من الخط الرابع، بشرط أن تكون نقاط الحذف تحقق الشروط الأتية

1-لا يوجد خط في المستوى الاسقاطي PG(2,q) والذي يختلف عن L_2 يحتوي على 4 نقاط من النقاط المحذوفة.

2-الخطوط التي تحتوي على ثلاثة من النقاط المحذوفة تتقاطع على الأكثر مع 3 نقاط من النقاط الجديدة A_1, A_2, A_3 التي سوف يتم أضافتها بعد عملية الحذف.

3-الخطوط التي تحتوي فقط على نقطتين من النقاط المحذوفة يجب أن لا تمر بنقاط التقاطع P_1, P_2, P_3, P_4.

الشروط من a إلى c ستتضمن إضافة النقاط A_1, A_2, A_3 للمجموعة المتبقية من النقاط وبالتالي نحصل على مجموعة قالبية _t.

الخطوة 4: تحديد نقاط الحذف من كل خط بحيث لا توجد أي نقطة تحقق معادلة المستقيم:

$L_{54} = [130]$

$L_{55} = [89,116,124,39]$

$L_{56} = [90\ ]$

$L_{57} = [67, 86, 37]$

الخطوة 5: نولد معادلات المستقيم الخاصة بالخطوط الأربعة التي تم اختيارها على أساس وجود نقاط مشتركة بينها حيث يمكن تمثيل معادلة المستقيم بشكل:

$l_i = a_i x + b_i y + c_i z = 0, i = 1,2,3,4$

الخطــوة 6: تكـوين الصـيغة العامـة لمعادلـة المسـتقيم مـن خـلال نقـاط التقـاطع فـي المسـتوي الاسقاطي$PG(2,11)$ {54,55,56,57} حيث هنالك 12 خط يمر من خلال النقطة (0,0,1) لذلك تكون لدينا الصيغة العامة لمعادله المستقيم بالشكل التالي

$ax + by + cz = 0 \ldots (1)$

بالتعويض $(a, b, c) = (0,0,1)$ في المعادلة رقم (1) ينتج: $cz = 0 \Rightarrow c = 0$

بالتعويض عن قيمة c نحصل على المعادلة الجديدة $ax + by = 0$

الآن عندما تكون $a = 0$ ينتج $by = 0 \Rightarrow y = 0$ ،وبنفس الطريقة عندما تكون $a = 1, b = 0$ ينتج $x = 0$ وبما إن كل خط يمر من خلال 12 نقطة لذلك تكون قيمة b=1,2,…,10 وبالتالي نحصل على 12 معادلة:

$p1: y = 0,$ $p7: x + 5y = 0,$
$p2: x = 0,$ $p8: x + 6y = 0,$
$p3: x + y = 0,$ $p9: x + 7y = 0,$
$p4: x + 2y = 0,$ $p10: x + 8y = 0,$
$p5: x + 3y = 0,$ $p11: x + 9y = 0,$
$p6: x + 4y = 0,$ $p12: x + ay = 0,$

الخطوة 7: توزيع نقاط المستوي بحيث إنَّ كل معادلة من المعادلات السابقة تحقق مجموعة من النقاط على النحو الأتي:

المعادلة $p12: x + ay = 0$ ، تحقق النقاط 29=(1,1,1), 42=(1,1,a) , 95=(1,1,7), 132=(1,1,0)

تحقق النقاط $p_4 = x + 2y = 0$كذلك بالنسبة لمعادلة

40=(1,5,8) , 44=(1,5,1) , 58=(1,5,6) , 60=(1,5,4), 61=(1,5,5) , 70=(1,5,0) ,89=(1,5,7) , 121=(1,5,2) , 129=(1,5,10) ,83=(1,5,3)

حيث أن جميع النقاط الموجود تحقق المعادلة.

الخطوة 8: نقوم بتعويض نقاط الحذف في معادلة المستقيم من اجل تحديد نقاط الإضافة: $PG(2,11)$ في المستوي الاسقاطي

$g_1 = x + 2y + z = 0$
$g_2 = x + 5y + 7z = 0$
$g_3 = x + az = 0$
$g_4 = x + 4y + z = 0$
$g_5 = x + ay + 4z = 0$
$g_6 = x + 6y + az = 0$
$g_7 = x + 6y + 7z = 0$
$g_8 = x + 9y + az = 0$
$g_9 = x + z = 0$

الخطوة 9: نقوم بتحديد نقاط الإضافة وذلك من خلال تعويض النقاط في معادلات نقاط الحذف حيث أن كل أربعة نقاط تشترك بنقطة واحدة:

$g_1 \cap g_6 = 123$, $g_2 \cap g_3 \cap g_4 \cap g_5 = 44$, and $g_7 \cap g_8 \cap g_9 = 42$

الخطوة 10: نقوم بإضافة النقاط الجديدة إلى نقاط الخطوط الأربعة المتبقية فينتج لدينا مجموعة الجديد:(97،10)بعد حذف النقاط المكررة التي تكافئ القوس (36,2) قالبية جديدة_

{64,77,83,88,115,123,34,38,52,65,78,84,131,35,53,66,79,85,117,125,132,36,40, 58,80,91,118,126,133,41,54,55,56,57,42,44,123}

مجموعة قالبية _(36,2) التي تكافئ القوس _(97,10). حيث ان القوس_(97,10) هو تحسين للقوس_(96,10) المذكور في.[10] أذن بالاعتماد على المبرهنة (3.3 .3) الشفرات الخطية $[97,3,87]_{11}$ موجودة.

الخوارزمية الثانية الجديدة لعملية البناء الهندسي للمجموعة القالبية _ (40,2) وعلاقتها بالشفرات الخطية $[143,3,131]_{13}$ في المستوي الاسقاطي PG(2,13)

تُعدُّ هذه الخوارزمية مشابهة الى حد كبير الخوارزمية المذكورة في المصدر [9]، يرجع سبب استخدام هذه الخوارزمية إلى التحقق من أنَّ هنالك اكثر من مجموعة قالبية جديدة من استخدام نفس الخطوط السابقة وهل من الممكن الحصول على نتائج مختلفة؟ تعتمد الخوارزمية على اختيار أربعة خطوط بحيث تحتوي على سته نقاط مشتركة،

وأيضا هناك اختلاف في نقاط الإضافة بحيث تحقق كل نقطة من نقاط الاضافة جميع نقاط الخط الخاص بنقطة بشرط ان تكون النقطة المضافة من ضمن نقاط الحذف، وكذلك هنالك اختلاف في عدد نقاط الحذف التي تشمل 14 نقطة من مجموع نقاط الخطوط الأربعة، تتضمن الخوارزمية الخطوات الآتية:

مبرهنة (5): وجود الشفرات الخطية $[143,3,131]_{13}$ في المستوي الاسقاطي PG(2,13)

البرهان:

الخطوة 1: نقوم باختيار أربعة خطوط من خطوط المستوي الاسقاطي PG(2,13) بشرط أن تحتوي على سته نقاط مشتركة على الشكل الآتي:

L_{25}: [25,26,33,49,62,66,84,132,144,153,159,164,178,23]
L_{38}: [38,39,46,62,75,79,97,145,157,166,172,177,8,36]
L_{69}: [69,70,77,93,106,110,128,176,5,14,20,25,39,67]
L_{102}: [102,103,110,126,139,143,161,26,38,47,53,58,72,100]

$L_{25} \cap L_{38} = 62$, $L_{25} \cap L_{69} = 25, L_{25} \cap L_{102} = 26$
$L_{38} \cap L_{69} = 39$, $L_{38} \cap L_{102} = 38$, $L_{69} \cap L_{102} = 110$

الخطوة 2: تعويض نقاط التقاطع{25,26,38,39,62,110} في معادلة المستقيم

$ax + by + cz = 0$

الخطوة 3: نقوم بعملية حذف 14 نقاط من مجموعة نقاط $L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ أربعة نقاط من كل من الخط الأول والخط الثالث وثلاث نقاط من كل من الخط الثاني والرابع، بشرط أن تحقق عملية حذف النقاط الشروط الآتي:

1-لا يوجد خط في المستوى الاسقاطي PG(2,q) والذي يختلف عن L_1, L_3 يحتوي على 4 نقاط من النقاط المحذوفة

2-الخطوط التي تحتوي على ثلاثة من النقاط المحذوفة تتقاطع على الأكثر مع 4 نقاط من النقاط الجديدة A_1, A_2, A_3, A_4 ، التي سوف تتم أضافتها بعد عملية الحذف.

3-الخطوط التي تحتوي فقط عل نقطتين من النقاط المحذوفة تلك الخطوط يجب أن لا تمر بنقاط التقاطع P_1, P_2, P_3, P_4 .

الشروط من 1 إلى 3 ستتضمن إضافة النقاط A_1, A_2, A_3, A_4 للمجموعة المتبقية من النقاط وبالتالي نحصل على مجموعة قالبية _t.

الخطوة 4: تحديد نقاط الحذف من كل خط بحيث توجد نقطة واحدة على الأقل تحقق معادلة المستقيم:

$L_{25} = [33,49,66,144]$
$L_{38} = [145,8,36]$
$L_{69} = [70,77,5,14\ ]$
$L_{102} = [102,143,53]$

الخطوة 5: نولد معادلات المستقيم الخاصة بخطوط الأربعة التي تم اختيارها على أساس وجود نقاط مشتركة بينها حيث يمكن تمثيل معادلة المستقيم بشكل:

$l_i = a_i x + b_i y + c_i z = 0, i = 1,2,3,4$

الخطوة 6: تكوين الصيغة العامة لمعادلة المستقيم من خلال نقاط التقاطع في المستوي الاسقاطي PG(2,13) {25,26,38,39,62,110} حيث هنالك 14 خط يمر من خلال النقطة (0,0,1) لذلك تكون لدينا الصيغة العامة لمعادله المستقيم بالشكل التالي:

$ax + by + cz = 0 \dots (1)$

بالتعويض $(a, b, c) = (0,0,1)$ في المعادلة رقم (1) ينتج:

$cz = 0 \Rightarrow c = 0$

بالتعويض عن قيمة c نحصل على المعادلة الجديدة $ax + by = 0$

الآن عندما تكون $a = 0$ ينتج $by = 0 \Rightarrow y = 0$،

وبنفس الطريقة عندما تكون $a = 1, b = 0$ ينتج $x = 0$

بما أن كل خط يمر من خلال 14 نقطة لذلك تكون قيمة b=1,2,…,12 وبالتالي نحصل على 14 معادلة:

$p1: y = 0, \qquad p8: x + 6y = 0,$

$p2: x = 0, \quad p9: x + 7y = 0,$
$p3: x + y = 0, p10: x + 8y = 0,$
$p4: x + 2y = 0, p11: x + 9y = 0,$
$p5: x + 3y = 0, p12: x + ay = 0,$
$p6: x + 4y = 0, p13: x + by = 0,$
$p7: x + 5y = 0, p14: x + cy = 0$

الخطـوة 7: نقـوم بتعـويض نقـاط الحـذف فـي معادلـة المسـتقيم مـن اجـل تحديـد نقـاط الإضـافة فـي المستوي الاسقاطي PG(2,13)

$g_1 = x + 6y + cz = 0$
$g_2 = x + 5y + 3z = 0$
$g_3 = x + ay + 9z = 0$
$g_4 = x + y + 6z = 0$
$g_5 = x + ay + 6z = 0$
$g_6 = x + by + 2z = 0$
$g_7 = y + 3y + 9z = 0$
$g_8 = x + 6y + z = 0$
$g_9 = x + 5y + az = 0$
$g_{10} = x + y + 7z = 0$
$g_{11} = y + ay + 4z = 0$
$g_{12} = x + 3y + 4z = 0$
$g_{13} = x + cy + 7z = 0$
$g_{14} = x + by + bz = 0$

الخطوة 8: نقوم بتحديد نقاط الإضافة وذلك من خلال تعويض النقاط في معادلات نقاط الحذف حيث أن كل أربعة نقاط تشترك بنقطة واحدة:

$g_1 \cap g_2 \cap g_3 \cap g_4 = 66$, $g_5 \cap g_6 \cap g_7 = 36$,
$g_8 \cap g_9 \cap g_{10} \cap g_{11} = 14$ and $g_{12} \cap g_{13} \cap g_{14} = 102$

الخطوة 9: نقوم بإضـافة النقـاط الجديـدة إلـى نقـاط الخطـوط الأربعـة المتبقيـة فينـتج لـدينا مجموعـة قالبيـة جديدة (40,2) التي تكافئ القوس _(143,12) الجديد.

{25,26,62,84,132,153,159,164,178,23,38,39,46,75,79,97,157,166,172,177,69,93
,106,110,128,176,20,67,103,126,139,161,47,58,72,100,14,102,66,36}

اذن بالاعتماد على المبرهنة (3.3.3) الشفرات الخطية $[143,3,131]_{13}$ موجودة.

References

[1] Aziz ,S.M. (2001) , " **On Lower Bound for Complete (k,n) - arc in PG(2,q) "** , M. Sc, thesis , Mosul University.

[2] Ball. S (1994) **" On the Size of a Double Blocking Set in PG(2, q)"** University of Sussex, Falmer, East Sussex, United Kingdom ,125-133.

[3] Ball. S **" Multiple blocking sets and arcs in finite planes"**. J. London Math. Soc., 54(3):581-593, 1996.

[4] Ball.S, Montanucci. E (2007), **"Affine blocking sets, three-dimensional codes and the Griesmer bound"** university Politècnica de Catalunya, university degli Studi di Perugia , Pages 1600–1608.

[5] Braun. M. , Kohnert. A. and Wassermann. A. (2005), **" Construction of (n; r)-arcs in PG(2, q) "** Innovations in Incidence Geometry , 133_141.

[6] Cheon. E. J. , Jung S. O, Kim S. J (2012), **" On the (29, 5)-arcs in P G(2, 7) and linear codes"** ,Department of Mathematics and RINS Gyeongsang National University, Korea , November 15–17, 2012.

[7] Daskalve.R , Hristor.P , Metodieva. E, (2004) **" New minimum distance bounds for linear codes over GF(5) ",** Department of Mathematics, Technical University of Gabrovo 97_110.

[8] Daskalve.R , Metodieva. E (2013) , "**Improved Bounds on m (2, q) q = 19, 25, 27 "** , Department of Mathematics, Technical University of Gabrovo.

[9] Daskalov.R (2007) " **A geometric construction of a *(*38, 2*)*-blocking set in PG*(*2, 13*)* and the related [145, 3, 133]13 code "** , Department of Mathematics, Technical University of Gabrovo, 1341_1345.

[10] Fiadh. M.S (2013), **"Complete Arcs Projective Plane PG(2,11) Over Galois field "_** , Department of computer, College of Education , The Iraqi University , 298_310.

[11] Hirsehfeld. J.W.P (1979) , **<u>"projective Geometries over finite fields"</u>** , oxford university , press oxfored.

[12] Hirsehfeld. J.W.P (2001) , L.Stome **," The Paching Problem in statistics, coding theory and finite projective spaes "** ,university of Sussex, Ghent university , 1_45.

[13] Hill.R (1992) , **"optimal linear codes"** , Cryptography and codind II, oxford university , 41-70.

[14] Hill.R (2003) , Love.C.P **"on the (22,4)_arcs in PG(2,7) and related codes"** , Discrete Mathematics 266 , 253-261.

[15] Kløve.T (2007),**" On the existence of proper codes for error detection",** University of Bergen, Norway. Singapore , 1_10.

[16] Maruta. T (2013), **"Construction of optimal linear codes By Geometric Puncturing ",** No 1,73-80.

Optimal 4-dimensional linear codes "**[**17] Maruta. T (2009) **, over finite fields "** Department of Mathematics and Information Sciences Osaka Prefecture University ,212_ 220.

[18] Pellikaan. R, Shen.B.Z and van Wee.G.J.M (1991) **" Which linear codes are algebraic-geometric ? "** 583-602.

[19] Storme.L (2010) ,**"Galois geometries contributing to coding theory"** , Dept. of Mathematics, Ghent University , 141_168.

[20] Tonchev.V.D (2009) , **"An Introduction to Coding Theory: Lecture "** Department of Mathematical Sciences ,Michigan Technological University ,Houghton, Michigan.

[21] Van lint. J.H (1992**),"An Introduction to Coding Theory"** , second Edition , Springer ,Belin , 1_68.

[22] Yasin.A.L, (1986) , **" Cubic arcs in the projective plane of order eight "** , ph.D.Thesis , University of Sussex ,England.

[23] **"http://ar.wikipedia.org/wiki "**